J'ai retrouvé les points de Brocard

par Patrick TELLER

S'il est un sujet que la géométrie classique a étudié c'est le triangle et cela s'est traduit entre autres par la description de points caractéristiques du triangle, comme le points de Nagel , de Lemoyne, de Gergone etc.. Les deux points de Brocard d'un triangle ont été mis en évidence vers 1880 et, oubli de la géométrie classique aidant, ils sont méconnus de nombre d'entre nous, moi le premier; j'aimerais raconter ici comment les réflexions sur un exercice tout à fait actuel m'ont conduit à les rédécouvrir.

J'ai l'habitude de poser à mes élèves cet exercice: on considère trois points A, B, C formant un vrai triangle et un point P du plan, on forme une suite de points en itérant, **toujours dans le même ordre** les projections orthogonales sur les côtés du triangle (ABC), que se passe-t-il ?

L'application du théorème du point fixe nous mène, suivant l'ordre des projections à deux triplets de points particuliers (A'B'C') et (A"B"C"), appartenant respectivement aux trois côtés du triangle, qui sont les limites des suites obtenues et qui, étant chacun fixe par la succession de ces trois projections orthogonales déterminent un triangle dont les côtés sont perpendiculaires à ceux du triangle (ABC) et par suite directement semblable à celui-ci.

Les deux similitudes sont les suivantes: $\begin{cases} A \longmapsto A' \in \text{(AB)} \\ B \longmapsto B' \in \text{(BC)} \\ C \longmapsto C' \in \text{(CA)} \end{cases}$ et $\begin{cases} A \longmapsto A'' \in \text{(CA)} \\ B \longmapsto B'' \in \text{(AB)} \\ C \longmapsto C'' \in \text{(CB)} \end{cases}$; comme l'image de chaque sommet est un sommet qui appartient à un côté adjacent nous appellerons ces similitudes « immédiates » pour les distinguer de la similitude bien connue: si on désigne les milieux des côtés [AB], [BC] et [CA] par $\dot{C}$, $\dot{A}$ et $\dot{B}$, on obtient $(\dot{A}\dot{B}\dot{C})$ semblable à (ABC), par une similitude directe dont le centre est l'isobarycentre du triangle (ABC).

Le caractère particulier de cette définition (comme limites de suites) n'est pas satisfaisant sur le plan géométrique et pose plusieurs questions: Existe-t-il d'autres triangles inscrits immédiatement semblables à (ABC) ? Comment les déterminer, ou ce qui revient au même, déterminer les centres de similitude ?

1 Une suite de projections orthogonales

Rappelons la preuve de l'existence des deux triplets de points (A'B'C') et (A"B"C").

Soit un triangle (ABC), non plat et non rectangle, on désigne par $\mathcal{P}_{\text{(AB)}}$, $\mathcal{P}_{\text{(BC)}}$ et $\mathcal{P}_{\text{(CA)}}$ les projections orthogonales sur les droites (AB), (BC) et (CA), par $\Pi_{\text{(AB)}}$, $\Pi_{\text{(BC)}}$ et $\Pi_{\text{(CA)}}$ les endomorphismes associés, par f la composée $\mathcal{P}_{\text{(AC)}} \circ \mathcal{P}_{\text{(BC)}} \circ \mathcal{P}_{\text{(BA)}}$ et par $\hat{f}$ la restriction de f à la droite (AC).

Il est immédiat que f est une application affine, que l'endomorphisme associé à f est la composée $\Pi_{\text{(AC)}} \circ \Pi_{\text{(BC)}} \circ \Pi_{\text{(BA)}}$, qui sont des projections orthogonales sur des directions indépendantes deux à deux; par suite f est une application affine contractante et il en est de même pour $\hat{f}$, qui admet donc un point fixe unique que l'on désignera par A'∈(AC); en raisonnant de même sur la restriction de g= $\mathcal{P}_{\text{(AB)}} \circ \mathcal{P}_{\text{(AC)}} \circ \mathcal{P}_{\text{(BC)}}$ à la droite (AB) on montre alors qu'elle possède un point fixe unique, B', sur la droite (AB) , il en sera de même pour la restriction de h= $\mathcal{P}_{\text{(BC)}} \circ \mathcal{P}_{\text{(AB)}} \circ \mathcal{P}_{\text{(AC)}}$ à la droite (BC) et son point fixe C'.

La continuité des projections orthogonales entraîne que B'=$\mathcal{P}_{\text{(AB)}}$(A'), que C'=$\mathcal{P}_{\text{(BC)}}$(B') et que A'=$\mathcal{P}_{\text{(CA)}}$(C') et par suite, (A'B')⊥(AB), $(B'C')$⊥(BC) et (C'A')⊥(AC); de même si on étudie la composée $\mathcal{P}_{\text{(AB)}} \circ \mathcal{P}_{\text{(CB)}} \circ \mathcal{P}_{\text{(CA)}}$ on obtient $A'' \in$ (CA),$B'' \in$ (AB),$C'' \in$ (CB) et un triangle (A"B"C").

Par suite chacun des deux triangles (A'B'C') et (A"B"C") est invariant par les projections orthogonales considérées, ce qui leur confère un certain intérêt; ils ne me semblent pas être mentionnés dans la littérature et on ne les confondra pas avec le triangle orthique.

Vue la symétrie du problème nous nous attacherons dans cette partie au seul triangle (A'B'C') que nous désignerons comme premier triangle invariant.

2 Une construction effective du premier triangle invariant

Il suffit de remarquer que ce triangle possède des côtés perpendiculaires deux à deux avec le triangle (ABC) donc ces deux triangles sont semblables et, leur orientation étant la même, ils sont directement semblables.

Le triangle (A'B' C') étant construit comme limite il serait intéressant d'en trouver une construction effective; ce qui en caractérise les sommets c'est qu'ils appartiennent aux supports des côtés du triangle (ABC) et que les angles $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\, \overrightarrow{A'B'}\right)$, $\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}},\, \overrightarrow{B'C'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\, \overrightarrow{C'A'}\right)$ sont égaux à -$\frac{\pi}{2}$, par suite l'angle de la similitude est -$\frac{\pi}{2}$, on désignera le centre de cette similitude directe par Ω'; remarquons que le rapport de similitude est sans importance pour notre construction parce qu'une fois connues les droites (Ω'A'), (Ω'B') et (Ω'C') il suffit de déterminer leurs intersections avec les supports des côtés (AC), (AB) et (BC).

De plus une application immédiate des relations trigonométriques dans les triangles directs $(\Omega \mathrm{AA}')$, $(\Omega \mathrm{BB}')$, $(\Omega \mathrm{CC}')$ nous montre qu'alors les angles $(\overrightarrow{A\Omega'}, \overrightarrow{\mathrm{AA}'})$, $(\overrightarrow{B\Omega'}, \overrightarrow{\mathrm{BB}'})$ et $(\overrightarrow{C\Omega'}, \overrightarrow{\mathrm{CC}'})$ sont égaux; le point Ω' est donc l'intersection de trois droites (D_1), (D_2), (D_3) issues respectivement de A, B, C et dirigées par des vecteurs faisant un même angle avec, respectivement, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$, $\overrightarrow{\mathrm{BB}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CC}'}$; on désignera de telles droites sous le nom de premières isoclines. Pour déterminer le point Ω' nous allons établir de manière formelle un système formé par des équations de ces trois droites; pour simplifier la lecture nous allons traiter le cas de la droite (D_1) en détail et appliquer ensuite la même démarche à (D_2) et (D_3).

La droite (D_1) appartient au faisceau engendré par la droite (AB) et la perpendiculaire (Δ_1), si une équation de (AB) est $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ une équation de (Δ_1) sera $b_1x - a_1y + d_1 = 0$, une équation de (D_1) sera donc une combinaison linéaire $\alpha(a_1x + b_1y + c_1) + \beta(b_1x - a_1y + d_1 = 0$; si on suppose que l'équation $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ est normale il en sera de même de $b_1x - a_1y + d_1 = 0$ et le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ représente l'angle $(\overrightarrow{A\Omega'}, \overrightarrow{\mathrm{AA}'})$, comme cet angle n'est pas droit on peut prendre $\beta = 1$, d'où une équation de (D_1) sera $\alpha_1(a_1x + b_1y + c_1) + (b_1x - a_1y + d_1) = 0$.

On pourra raisonner de manière analogue pour (D_2) et (D_3) et, puisque les angles $(\overrightarrow{A\Omega'}, \overrightarrow{\mathrm{AA}'})$, $(\overrightarrow{B\Omega'}, \overrightarrow{\mathrm{BB}'})$ et $(\overrightarrow{C\Omega'}, \overrightarrow{\mathrm{CC}'})$ sont égaux, les coefficients α_1, α_2 et α_3 seront égaux et on aura pour les droites (D_1), (D_2), (D_3) des équations de la forme $\alpha(a_1x + b_1y + c_1) + b_1x - a_1y + d_1 = 0$,$\alpha(a_2x + b_2y + c_2) + b_2x - a_2y + d_2 = 0$,$\alpha(a_3x + b_3y + c_3) + b_3x - a_3y + d_3 = 0$.

Par suite les coodonnées du centre de similitude Ω' sont données par le système $\begin{cases} \alpha(a_1x + b_1y + c_1) + b_1x - a_1y + d_1 = 0 \\ \alpha(a_2x + b_2y + c_2) + b_2x - a_2y + d_2 = 0 \\ \alpha(a_3x + b_3y + c_3) + b_3x - a_3y + d_3 = 0 \end{cases}$ (S_α); l'existence d'une solution au système exige la compatibilité du système donc il est nécessaire que la matrice $\alpha\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & -a_1 & d_1 \\ b_2 & -a_2 & d_2 \\ b_3 & -a_3 & d_3 \end{pmatrix}$ soit singulière; notons cette condition est suffisante pour l'existence de Ω' car, les droites $(A\Omega')$, $(B\Omega')$, $(C\Omega')$ n'étant pas parallèles, le système ne peut avoir de solutions de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$.

A toute valeur de α ainsi déterminée correspondra donc une solution Ω'.

La matrice M=$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ étant régulière il existe un vecteur $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} b_1 & -a_1 & d_1 \\ b_2 & -a_2 & d_2 \\ b_3 & -a_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & p \\ 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ (un simple calcul explique les deux premières colonnes); si on désigne par N la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & p \\ 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ on voit que l'existence de Ω' exige l'existence d'un réel α tel que αM + MN = $M(\alpha I_3 + N)$ soit singulière, donc que$-\alpha$ est donc valeur propre de N; un simple calcul montre aisément que N n'admet qu'une seule valeur propre réelle, r, donc il n'existe qu'un seul réel α pour lequel le système (S_α) possède une solution et par suite un seul centre de similitude d'angle -$\frac{\pi}{2}$ transformant le triangle (ABC) en son premier triangle invariant à sommets sur les côtés (CA), (AB), (BC).

3 Ω' et Ω'' sont les points de Brocard du triangle (ABC)

Les deux points Ω' et Ω'' sont en fait des points caractéristiques du triangle et sont connus comme le premier et le deuxième point de Brocard du triangle (ABC); la propriété dégalité des leur construction est classique: des considérations d'angles inscrits dans des cercles montrent que Ω' est l'intersection du cercle passant par A et B, tangent en B à (BC), du cercle passant par B, tangent en C à (CA) et du cercle passant par C et tangent en C à (AB); bien entendu une construction analogue déterminera le point Ω''.

A partir du centre de similitude Ω' il suffit de mener les perpendiculaires aux droites $(A\Omega')$, (BΩ') et $(C\Omega')$ pour obtenir les sommets du triangle invariant A', B', C'.

La construction de l'autre centre de similitude Ω'' est analogue et par suite celle du second triangle invariant.

4 Ω' est le premier point de Brocard du triangle (A'B'C')

Dans la similitude de centre Ω' A est transformé en A', B en B', C en C', (AB) en (A'B'), (BC) en (B'C') et (CA) en (C'A') et bien entendu Ω' en lui-même; d'où Ω' est à nouveau l'intersection des premières isoclines du triangle (A'B'C'), par suite c'est aussi le premier point de Brocard du premier triangle invariant (A'B'C').

D'où la conclusion: si on répète cette construction on obtient une suite de triangles, où chacun est le premier triangle invariant du précédent, on pourra montrer que la suite des triangles converge vers le premier point de Brocard; la convergence étant décrite comme ponctuelle ou bien en considérant les triangles comme des triplets dans l'espace $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Une conclusion analogue vaut aussi pour les seconds triangles invariants et le deuxième point de Brocard.

5 Extension aux projections obliques

Si Ω' et Ω'' sont les centres des similitudes immédiates d'angles, respectivement -$\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et, par ailleurs les seuls centres de similitude transformant (ABC) en un triangle directement semblable dont les sommets sont portés par les côtés du triangle (ABC); nous allons montrer que les deux triangles $(A'B'C')$ et (A"B"C") ne sont pas les seuls triangles inscrits dans le triangle (ABC) et immédiatement semblables à celui-ci.

Considérons le point Ω' déterminé au-dessus et désignons par $\theta' \in]0, \pi[$ l'angle $(\overrightarrow{A\Omega'}, \overrightarrow{\mathrm{AB}})$= $(\overrightarrow{B\Omega'}, \overrightarrow{\mathrm{BC}})$=$(\overrightarrow{C\Omega'}, \overrightarrow{\mathrm{CA}})$,soit $\varphi' \in]0, \pi - \theta'[$ et les points $A_1 \in$ (AB), $B_1 \in$ (BC), $C_1 \in$ (CA) définis par les égalités $(\overrightarrow{\Omega' A},\overrightarrow{\Omega' A_1})$=$(\overrightarrow{\Omega' B},\overrightarrow{\Omega' B_1}) = (\overrightarrow{\Omega' A},\overrightarrow{\Omega' A_1}) = \varphi'$, alors les triangles ($\Omega'\mathrm{AA}_1$), ($\Omega'\mathrm{BB}_1$) et ($\Omega'\mathrm{CC}_1$) sont directement semblables et par suite l'application affine définie par $\begin{cases} A \longmapsto A_1 \\ B \longmapsto B_1 \\ C \longmapsto C_1 \end{cases}$ est une similitude directe.

Ce qui signifie que les triangles (ABC) et ($A_1B_1C_1$) sont immédiatement semblables, il y a donc une famille de triangles inscrits immédiatement semblables à (ABC); il en est de même pour Ω''; les points Ω' et Ω'' sont, respectivement, les centres communs des similitudes de ces deux familles avec le triagnle (ABC);

Ils sont connus dans la littérature sur le triangle sous le nom de points de Brocard [1] et ils sont connus depuis 1875 !!

On est en droit de se demander dans quel cas les points de Brocard d'un triangle sont confondus.

Désignons, comme au-dessus, par $\theta' \in]0, \pi[$ l'angle $(\overrightarrow{A\Omega'}, \overrightarrow{\mathrm{AB}})$= $(\overrightarrow{B\Omega'}, \overrightarrow{\mathrm{BC}})$=$(\overrightarrow{C\Omega'}, \overrightarrow{\mathrm{CA}})$, et par $\theta'' \in]0, \pi[$ l'angle $(\overrightarrow{B\Omega''}, \overrightarrow{\mathrm{BA}})$= $(\overrightarrow{C\Omega''}, \overrightarrow{\mathrm{CB}})$=$(\overrightarrow{A\Omega''}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$; si les deux points Ω' et Ω'' sont confondus alors $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$= $(\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}})$=$(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}}) = \theta'' - \theta'$,et par suite les trois angles du triangle (ABC) sont égaux, il est donc équilatéral.

Réciproquement il est immédiat, lorsque le triangle (ABC) est équilatéral, pour des raisons de symétrie et d'invariance, que les points Ω' et Ω'' sont confondus, et ils sont confondus avec le centre du triangle.

6 Une construction de (A'B'C') et (A"B"C")

La propriété des points Ω' et Ω'' qui a permis de les définir au 2. nous fournit aussi une construction géométrique de ces points: des considérations d'angles inscrits dans des cercles montrent que Ω' est l'intersection du cercle passant par A et B, tangent en B à (BC), du cercle passant par B, tangent en C à (CA) et du cercle passant par C et tangent en C à (AB); bien entendu une construction analogue déterminera le point Ω''.

A partir des points Ω' et Ω'' il est immédiat de construire le point A', qui appartient à la droite (AB) et caractérisé par l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega' A}, \overrightarrow{\Omega' A'}\right) = \frac{\pi}{2}$ ainsi que les points B', C', A", B" C".

7 Une extension

Puisque le centre de similitude est déterminé , ne pourrait-on pas envisager d'autres similitudes de même centre mais plus d'angle droit et transformant les sommets A,B, C en d'autres points des côtés?

Bibliographie:

[1]. F.G.-M. Exercices de géométrie; éditions Jacques Gabay, Paris 1991 p.1238.

[2]. www.maths.ac-aix-marseille.fr/debart/geoplan/triangle_pt_caract.html.