La Cellule manquante et un lemme « à la Farkas »

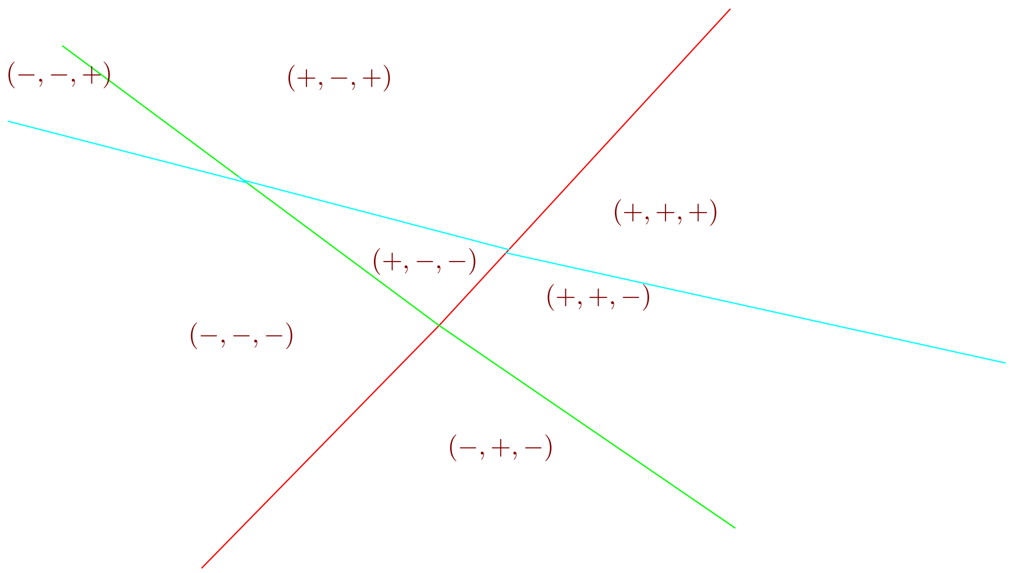
PAR

Patrick Teller

1 La Cellule manquante

Soient trois hyperplans affines en position générale dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $H_1(x_1, x_2) = 0$,$\mathrm{H}_2(x_1, x_2) = 0$,$\mathrm{H}_3(x_1, x_2) = 0$, on appellera cellules associées à ces polynômes les ouverts du plan sur lesquels les trois polynômes gardent chacun un signe constant.

Sur le dessin ci-dessous on a représenté la division du plan en cellules correspondant au triplet $(x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + 5x_2 - 7)$, ainsi que la suite des signes pris par ces polynômes sur chacune de ces cellules.



On constate la présence de 7 cellules correspondant à 7 suites différentes de signes + et -, qui représentent tous les cas possibles sauf un:(-,+,+), la « cellule manquante ».

Définition 1.

Soit l'espace $\mathbb{R}^n$ *et n+1 hyperplans affines d'équation* $H_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, H_{n+1}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ *on dira que ces hyperplans sont en position générale lorsque la matrice* $\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \ldots. \\ \ldots. \\ H_{n+1} \end{pmatrix}$ *est de rang n+1; on appelle cellules les ouverts sur lesquels la famille des polynômes conserve un signe constant; on appelle indicateur d'une cellule la liste des signes des valeurs prises par les* H_i *sur cette cellule.*

On écrira pour tout i, $H_i = H_i(0) + L_i$*.*

Le résultat suivant est classique:

Théorème 2. *[1]*

$n+1$ hyperplans affines en position générale dans $\mathbb{R}^n$ définissent $2^{n+1}-1$ cellules et à deux cellules différentes correspondent des indicateurs différents.

Comme il y a 2^{n+1} indicateurs possibles et $2^{n+1}-1$ cellules, sachant que l'application de l'ensemble des cellules vers l'ensemble des indicateurs est injective, il manque un indicateur; comment le trouver ?

Théorème 3.

Soit $(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{*(n+1)}$ tels que $\begin{cases} \sum_{i=1\ldots n+1} \lambda_i L_i = 0 \\ \sum_{i=1\ldots n+1} \lambda_i H_i(0) = -1 \end{cases}$ *l'indicateur manquant est* $(\text{signe}(\lambda_i))_{i=1\ldots.n+1}$.

Démonstration.

Comme les hyperplans sont en position générale les formes affines $H_i, i=1, \ldots., n+1$ sont linéairement indépendantes.

Les formes linéaires $L_i, i=1, \ldots, n+1$ appartenant à un espace vectoriel de dimension n sont liées mais toute sous-famille de $k<n+1$ formes L_i est libre, de telle sorte que dans toute relation de dépendance linéaire $\sum_{i=1,\ldots,n+1} \lambda_i L_i = 0$ les λ_i sont tous différents de zéro.

Quitte à multiplier le n+1-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ on peut poser

$\sum_{i=1,\ldots,n+1} \lambda_i L_i = 0$ *mais* $\sum_{i=1,\ldots,n+1} \lambda_i H_i = \sum_{i=1,\ldots,n+1} \lambda_i H_i(0) = -1$.

Suppposons qu'il existe un point α de $\mathbb{R}^n$ où $\forall i=1, \ldots., n+1$ $H_i(\alpha)$ soit du signe de $\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}$ alors $\sum_{i=1,\ldots,n+1} \lambda_i H_i(\alpha)$ serait strictement positif, ce qui est contradictoire.

Donc l'indicateur manquant est $(\text{signe}(\lambda_i))_{i=1\ldots.n+1}$. □

Dans l'exemple considéré plus haut $\lambda_1 = -1/2, \lambda_2 = 3/14, \lambda_3 = 1/7$, d'où l'indicateur manquant est (-,+,+).

2 Et un lemme « à la Farkas »

Voici un énoncé de type Farkas:

Théorème 4.

Soit $f_1, \ldots, f_{n+1}$ des formes affines linéairement indépendantes sur un espace affine réel E de dimension n. Alors :

$$\{y \in E | \, f_1(y) > 0, \ldots, f_{n+1}(y) > 0\} = \emptyset$$

si et seulement si

(−1) est une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de $f_1, \ldots, f_{n+1}$.

Le sens « montant » est évident, le sens « descendant » découle directement du Théorème 3.

Bibliographie:

[1] Robert P. Stanley, An introduction to Hyperplanes Arrangements, https://www.cis.upenn.edu/~cis610/sp06stanley.pdf