Une conjecture en arithmétique

PAR Patrick TELLER

Cette conjecture a été soumise au site Mathoverflow le 16/09/2014 où elle a été enregistrée sous le numéro 181019.

Définition 1. *On note f l'application qui à tout entier x>1 associe la somme de ses diviseurs strictement supérieurs à 1; ainsi f(5)=5, f(6)=11, etc...il est immédiat que x premier <=>f(x)=x.*

On notera $f^{\circ n}$ la composée n fois de f par f; ainsi $f^{\circ 3}(12) = f^{\circ 2}(39) = f(55) = 67$.

La conjecture PT est: $\forall x \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $f^{\circ p}$(x) est premier, ou, ce qui revient au même, $\forall x \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \exists p \in \mathbb{N}$, $f^{\circ p}(x) = f^{\circ(p+1)}(x)$; pour chaque x pour lequel cette conjecture est vraie on appellera F(x) la valeur $f^{\circ p}(x) = f^{\circ(p+1)}(x)$ et on désignera par r(x) (=rang du succès) la valeur de p, c'est à dire le nombre d'itérations nécssaires pou atteindre un premier.

Remarquons que si x est premier x=f(x) donc r(x)=0.

J'ai pu la vérifier pour les entiers de 2 à 2000000, un correspondant a poussé jusqu'à 200000000.

On peut en trouver aussi une trace sur le site OEIS qui recense les suites intéressantes, sous le numéro A039654.

J'ai obtenu des commentaires de type probabiliste fondés sur la proportion de nombres premiers dans un intervalle; ces raisonnements probabilistes confortent la conjecture mais ils ont cette faiblesse que, si on remplace la fonction f par la fonction g, définie comme « la somme de tous les diviseurs plus 1 », il existe des suites infinies, obtenues par exemple avec comme valeur initiale x=2^k. Ceci montre que la difficulté de la conjecture ne se résoud pas simplement par un point de vue probabiliste.

Cependant il est possible que, si on définit de manière générale une famille de fonctions f_a par f_a(x)= la somme de tous les diviseurs de x plus a (auquel cas la fonction f devient f_{-1}), on puisse constater des résultats variables avec a, mettant en évidence des phénomènes de type « bifurcations ».

Il est possible aussi que l'on puisse s'intéresser aussi à des ensembles de valeurs initiales pour une fonction f_a donnée et montrer, par exmple pour f_{+1} que les valeurs initiales comme 2^k sont « rares ».

Un autre aspect de la question concerne spécifiquement la fonction f et les nombres premiers: tous les premiers ne sont pas égaux devant l'itération: certains sont limites pour une seule suite (celle qui commence avec x et s'achève avec x), d'autres sont limites pour un grand nombre de valeurs initiales; d'où une « classification » des premiers comptant beaucoup d'antécédants et les autres.

Ce qui nous conduit à la question « ceci permet-il de fabriquer de nouveaux nombres premiers ? »; en un sens non parce que lorsque la suite arrive à une valeur y, le seul moyen de savoir si y est premier (et donc point fixe de f) est de calculer la somme de ses diviseurs strictement plus grands que 1; en un sens oui parce que , tout comme dans le cas des nombres de Mersenne, qui ne sont pas nécessairement premiers mais fournissent des candidats à tester, les entiers qui apparaitront dans les suites construites en itérant f seront des candidats à tester.

Dernière remarque: les interlocuteurs mathématiques qui ont croisé cette conjecture ont jusque là partagé mon sentiment: elle est très plausible mais sa démonstration doit être très difficile.

Une demande: faites-moi connaitre vos remarques, vos résultats, vos commentaires

et « amusez-bien ».