Matrices normales sans complexes.

par Patrick TELLER

Résumé

Il était peut-être inélégant d'utiliser les complexes pour étudier les matrices symétriques réelles; maintenant ce sera impossible, vu l'évolution des programmes. Cela nous incite à considérer les matrices symétriques (et antisymétriques) réelles et les matrices orthogonales comme des cas particuliers de matrices normales réelles; ce qui permet de traiter de leur spectre, de leur réduction dans une base orthonormée de manière élémentaire et sans intervention des complexes.

Définition 1. *Une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera dite normale lorsque $A^tA={}^tAA$.*

En particulier les matrices symétriques réelles et les matrices orthogonales sont normales.

On rappellera le résultat bien connu:

Lemme 2. *L'application $(A,B)\longmapsto \mathrm{trace}({}^t\mathrm{AB})$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; par suite une matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nulle si et seulement si trace(${}^t\mathbb{M}M$)$=0$.*

Définition 3. *Pour alléger les énoncés nous appellerons irréductible toute matrice $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est irréductible.*

Proposition 4. *Toute matrice réelle est trigonalisable par blocs dans une base orthonormée; les blocs de la diagonale étant de taille 1 ou 2, irréductibles.*

Démonstration. Le résultat, banal, sera démontré par récurrence sur n.

Si n=1 il est immédiat.

Supposons le résultat vrai jusqu'à n.

Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, u l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$de $\mathbb{R}^n$ et son polynôme minimal $\Pi_A(X)$.

i) Si celui-ci possède un facteur de degré 1, il possède une valeur propre réelle α et un vecteur propre normé ε_α; soit une base orthonormée $\mathcal{C}=(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$, alors si P est la matrice de passage (orthogonale) de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, ^{t}PAP est de la forme $\begin{pmatrix}\alpha & L\\ 0 & A'\end{pmatrix}$, où L est une ligne et A' appartient à $\mathcal{M}_{n\text{-}1}(\mathbb{R})$. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à A'.

ii) Si $\Pi_A(X)$ ne possède dans $\mathbb{R}[X]$ que des facteurs irréductibles de degré deux, soit un tel facteur $K(X)=X^2+\mathrm{bX}+c$, alors il existe un vecteur ε, normé, tel que $\left(u^2+\mathrm{bu}+\mathrm{cId}\right)(\varepsilon)=0$, d'où le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\varepsilon,u(\varepsilon))$ est stable par u; il possède une base orthonormée $\left(\varepsilon,\varepsilon'\right)$ que l'on peut compléter en une base orthonormée $\mathcal{C}=(\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon_3,\ldots,\varepsilon_n)$, alors si P est la matrice de passage (orthogonale) de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, ^{t}PAP est de la forme $\begin{pmatrix}A_2 & M\\ 0 & A''\end{pmatrix}$, où A_2 appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et A'' appartient à $\mathcal{M}_{n\text{-}2}(\mathbb{R})$. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à A''.

En conclusion A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix}A'_{11} & * & \ldots & \ldots & *\\ 0 & A'_{22} & * & \ldots & \ldots\\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & A'_{\mathrm{pp}}\end{pmatrix}$, où les blocs A'_{ii} sont des matrices de taille 1 ou de taille 2, irréductible.

□

Théorème 5. *Soit une matrice normale $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale P telle que*

^{t}PAP est une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A'_{11} & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & A'_{22} & 0 & ... & ... \\ ... & 0 & ... & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & A'_{\mathrm{pp}} \end{pmatrix}$, où les blocs A'_{ii} sont soit de taille 1, soit de taille 2, de la forme $\begin{pmatrix} a & \text{-}b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Démonstration. Remarquons avant tout que A est normale si et seulement si il existe une matrice orthogonale P telle que ^{t}PAP est normale.

Montrons maintenant que, si M est la matrice triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}$, M est normale si et seulement si $\begin{cases} M_{11}{}^tM_{11} + M_{12}{}^tM_{12} = {}^tM_{11}M_{11} \\ M_{12}{}^tM_{22} = {}^tM_{11}M_{12} \\ M_{22}{}^tM_{12} = {}^tM_{12}M_{11} \\ M_{22}{}^tM_{22} = {}^tM_{12}M_{12} + {}^tM_{22}M_{22} \end{cases}$ $(*)$.

Considérons d'abord l'égalité $M_{11}{}^tM_{11} + M_{12}{}^tM_{12} = {}^tM_{11}M_{11}$ on en déduit la condition trace($M_{11}{}^tM_{11}$)+trace($M_{12}{}^tM_{12}$)=trace(${}^tM_{11}M_{11}$), d'où trace($M_{12}{}^tM_{12}$)=0, ce qui entraîne $M_{12} = 0$.

D'où la condition nécessaire $\begin{cases} M_{11}{}^tM_{11} = {}^tM_{11}M_{11} \\ M_{12} = 0 \\ M_{22}{}^tM_{22} = {}^tM_{22}M_{22} \end{cases}$, c'est à dire $M = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}$ et M_{11} et M_{22} normales.

La réciproque est immédiate: si $M = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}$ où M_{11} et M_{22} sont normales, il en est de même pour M.

Le cas des blocs de taille 1 est trivial, il reste à considérer le cas des matrices normales de taille deux:

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, l'égalité $M{}^tM = {}^tMM$ est équivalente au système $\begin{cases} a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \\ \mathrm{ab} + \mathrm{cd} = \mathrm{ac} + \mathrm{bd} \\ b^2 + d^2 = c^2 + d^2 \end{cases}$, qui équivaut à $\begin{cases} c^2 = b^2 \\ \mathrm{ab} + \mathrm{cd} = \mathrm{ac} + \mathrm{bd} \end{cases}$, d'où i) $b = c$ ou ii) $\begin{cases} b = \text{-c} \\ d = a \end{cases}$.

Remarquons maintenant que dans le cas i) le polynôme caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ possède un discriminant positif, donc n'est pas irréductible; il ne reste donc que les blocs de taille 1 et les blocs de la forme $\begin{pmatrix} a & \text{-}b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Ici aussi la réciproque est immédiate.

D'où le résultat. □

Théorème 6. *Soit une matrice symétrique réelle A, il existe une matrice orthogonale P telle que*

^{t}PAP est diagonale.

Démonstration. Une matrice symétrique est normale donc il existe une matrice orthogonale P telle que ^{t}PAP est de la forme $A' = \begin{pmatrix} A'_{11} & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & A'_{22} & 0 & ... & ... \\ ... & 0 & ... & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & A'_{\mathrm{pp}} \end{pmatrix}$; il est immédiat que si P est orthogonale A est symétrique si et seulement si ^{t}PAP l'est; il suffit donc de considérer les matrices diagonales par blocs de la forme $A' = \begin{pmatrix} A'_{11} & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & A'_{22} & 0 & ... & ... \\ ... & 0 & ... & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & A'_{\mathrm{pp}} \end{pmatrix}$, où les blocs A'_{ii} sont soit de taille 1, soit de taille 2, de la forme $\begin{pmatrix} a & \text{-}b \\ b & a \end{pmatrix}$. Mais , comme A' est symétrique si et seulement si chacun des blocs A'_{ii} l'est, les blocs de la forme $\begin{pmatrix} a & \text{-}b \\ b & a \end{pmatrix}$ sont impossibles, d'où A' est diagonale.

Ce qui établit le résultat classique: les matrices symétriques réelles ont leurs valeurs propres réelles et sont diagonalisables dans une base orthonormée. □

Théorème 7. *Soit une matrice orthogonale A, il existe une matrice orthogonale P telle que* ^tPAP *est de la forme* $\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & ... & ... & ... \\ ... & 0 & A'_{p+q+1,p+q+1} & 0 & ... & ... \\ ... & ... & 0 & A'_{p+q+2,p+q+2} & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & A'_{p+q+r,p+q+\mathrm{rr}} \end{pmatrix}$*, où les blocs* A'_{ii} *sont de la forme* $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.

Démonstration. Une matrice orthogonale est normale donc il existe une matrice orthogonale P telle que ^{t}PAP est de la forme $A' = \begin{pmatrix} A'_{11} & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & A'_{22} & 0 & ... & ... \\ ... & 0 & ... & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & A'_{\mathrm{pp}} \end{pmatrix}$; il est immédiat que si P est orthogonale A est orthogonale si et seulement si ^{t}PAP l'est; il suffit donc de considérer les matrices diagonales par blocs de la forme $A' = \begin{pmatrix} A'_{11} & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & A'_{22} & 0 & ... & ... \\ ... & 0 & ... & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & A'_{\mathrm{pp}} \end{pmatrix}$, où les blocs A'_{ii} sont soit de taille 1, soit de taille 2, de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Enfin $A'^tA' = I_n$ si et seulement si les blocs de taille 1 sont égaux à $+1$ ou -1 et les blocs de taille 2 vérifient $A'^t{}_iA'_i = I_2$, et sont donc de la forme $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. □

Théorème 8. *Soit une matrice antisymétrique réelle A, il existe une matrice orthogonale P telle que*

Théorème 9. *Soit une matrice orthogonale A, il existe une matrice orthogonale P telle que* ^tPAP *est de la forme* $\begin{pmatrix} O_p & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & A'_{p+1,p+1} & 0 & ... & ... \\ ... & 0 & A'_{p+2,p+2} & ... & ... \\ & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & A'_{p+r,p+r} \end{pmatrix}$*, où les blocs* A'_{ii} *sont de la forme* $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.