Tango de matrices et de polynômes

PAR PATRICK TELLER, LYCÉE CHARLEMAGNE, PARIS

Il n'est pas inhabituel de démontrer des résultats de type topologique concernant des polynômes au moyen de l'étude de leurs matrices compagnons; nous présentons ici une démonstration élémentaire sur l'adhérence de l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, qui ne fait appel qu'à la compacité du groupe orthogonal (et donc ne nécessite aucun résultat sur les polynômes scindés); puis nous étudions l'adhérence de l'ensemble des polynômes scindés de $\mathbb{R}_k[X]$ et enfin nous déterminons les composantes connexes de l'ensemble des polynômes unitaires simples (« quadratfrei ») de degré k.

1 Première figure: les matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$

Rappelons le résultat suivant, bien connu:

Proposition 1. *Pour toute matrice trigonalisable $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ il existe une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}\mathrm{AQ}$ est triangulaire supérieure.*

Soit $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$ l'endomorphisme représenté dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k)$ par la matrice A; la trigonalisabilité de A signifie qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_k)$ telle que $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $a(\mathrm{Vect}(e'_1, \ldots, e'_i)) \subset (\mathrm{Vect}(e'_1, \ldots, e'_i))$. La méthode de Gram-Schmidt permet de construire une base orthonormée $\mathcal{B}'' = (e''_1, \ldots, e''_k)$ telle que $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \mathrm{Vect}(e''_1, \ldots, e''_i) = (\mathrm{Vect}(e'_1, \ldots, e'_i))$.

Par suite si on considère la matrice de passage Q de $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k)$ à la base $\mathcal{B}'' = (e''_1, \ldots, e''_k)$, la matrice $Q^{-1}\mathrm{AQ}$ est triangulaire supérieure.

Théorème 2. *L'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est fermé.*

On considère une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ qui tend vers une matrice A; il existe donc une suite de matrices orthogonales $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une suite de matrices triangulaires supérieures $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $Q_n^{-1} A_n Q_n = T_n$, c'est à dire $A_n = Q_n T_n Q_n^{-1}$.

Comme le groupe orthogonal $\mathcal{O}_k(\mathbb{R})$ est compact il existe une sous-suite $(Q_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice orthogonale Q, d'où $(A_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (Q_{\varphi(n)} T_{\varphi(n)} Q_{\varphi(n)}^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice QTQ^{-1}, où T est triangulaire supérieure et par suite $A = \mathrm{QTQ}^{-1}$ et donc A est trigonalisable. Ce qui établit le résultat demandé.

D'où le

Théorème 3. *L'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables.*

Il est facile de montrer (de même que dans $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$) que toute matrice trigonalisable de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est la limite d'une suite de matrices diagonalisables ce qui établit que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables.

2 Deuxième figure: les polynômes scindés de $\mathbb{R}_k[X]$

Nous allons nous appuyer sur les résultats du 1. pour étudier l'ensemble des polynômes scindés de degré inférieur ou égal à k; la principale difficulté réside dans le fait que nous allons être contraints de considérer des suites de polynômes dont le degré n'est pas nécessairement constant.

Théorème 4. *L'ensemble des polynômes unitaires scindés de degré k est fermé.*

Soit une suite de polynômes unitaires scindés $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de degré k, à chaque polynôme nous associons sa matrice compagnon $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & -a_{n,0} \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & -a_{n,1} \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n,k-1} \end{pmatrix}$ qui est trigonalisable dans $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ puisque son polynôme caractéristique est scindé.

Si on suppose que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i + X^k$, la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$; le théorème précédent montre que A est trigonalisable par suite son polynôme caractéristique est scindé. Ce qui établit la fermeture de l'ensemble des polynômes unitaires scindés de $\mathbb{R}_k[X]$.

Proposition 5. *Si une suite de polynômes scindés $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_k[X]$ tend vers un polynôme P de degré k, sa limite est scindée.*

Soit une suite de polynômes scindés $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_k[X]$ qui converge vers un polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ de degré k, alors à partir d'un certain rang ils sont de degré k. Si on pose pour tout n $P_n(X) = \sum_{i=0}^{k} a_{n,i} X^i$, comme les coefficients dominants $a_{n,k}$ ne sont pas nuls, alors la suite des polynômes $Q_n(X) = a_{n,k}^{-1}(\sum_{i=0}^{k} a_{n,i} X^i)$ est une suite de polynômes unitaires scindés de degré k; elle converge vers $Q(X) = a_k^{-1}(\sum_{i=0}^{k} a_i X^i)$, qui est donc un polynôme unitaire scindé et par suite P(X) est scindé.

Proposition 6. *Si une suite de polynômes scindés $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_k[X]$ tend vers un polynôme P de degré inférieur à k tel que P(0)$\neq$0, sa limite est scindée.*

Contrairement aux cas précédents comme le degré du polynôme limite est strictement inférieur aux degrés des polynômes de la suite il ne sera pas possible de se ramener à des polynômes unitaires de degré constant donc des polynômes caractéristiques.

Remarquons avant tout qu'un polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ est scindé si et seulement si le polynôme $Q(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^{k-i}$ l'est.

Soit une suite de polynômes scindés $(P_n(X) = \sum_{i=0}^{k} a_{n,i} X^i)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_k[X]$ qui converge vers un polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ de $\mathbb{R}_k[X]$ tel que $a_0 \neq 0$, alors à partir d'un certain rang n_0 les coefficients constants $a_{n,0}$ sont non nuls; alors pour tout $n \geqslant n_0$ le polynôme $Q_n(X) = \sum_{i=0}^{k} a_{n,i} X^{k-i}$ est un polynôme scindé, la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_k[X]$ est une suite de polynômes scindés de degré k qui tend vers $Q(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^{k-i}$ qui est donc scindé, d'où $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ l'est.

Théorème 7. *L'ensemble des polynômes scindés $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_k[X]$ est fermé.*

On considère une suite de polynômes scindés $(P_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_k[X]$ qui converge vers un polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ de $\mathbb{R}_k[X]$; dans le cas où $a_0 = 0$ il suffit d'associer à cette suite une autre, qui sera scindée si et seulement si la première l'est et à qui il sera possible d'appliquer les résultats précédents.

Soit la limite $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$, posons $Q(X) = P(X + \lambda)$ où λ est choisi de telle sorte que $Q(0) \neq 0$, $Q(X)$ est scindé si et seulement $P(X)$ l'est et nous appliquerons le résultat de la proposition 6 à la suite $(P_n(X + \lambda))$.

3 Troisième figure: les cellules de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$

Pour tout $p \in \left\{0, \ldots, E\left(\frac{k}{2}\right)\right\}$ nous désignerons par $T_k^p(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ qui consiste en matrices triangulaires par blocs de la forme T=$\begin{pmatrix} M_1 & * & * & \ldots & \ldots & .. & \ldots \\ 0 & M_2 & * & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & M_p & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & m_1 & \ldots & \ldots \\ . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & * \\ 0. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & m_q \end{pmatrix}$, où les matrices M_i appartiennent à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et ont pour polynômes caractéristiques des polynômes du second degré irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et les m_i sont des réels.

Nous désignerons par $T_k^{'p}(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $T_k^p(\mathbb{R})$ où les polynômes caractéristiques des blocs M_i et les réels m_i sont distincts deux à deux.

Dans le cas p=0 on retrouve l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

De la même manière nous allons considérer dans $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ pour tout $p \in \left\{0, \ldots, E\left(\frac{k}{2}\right)\right\}$ l'ensemble $\mathcal{M}_k^p(\mathbb{R})$ des matrices semblables à une matrice de $T_k^p(\mathbb{R})$, et de même le sous-ensemble $\mathcal{M}_k'^p(\mathbb{R})$ des matrices semblables à des matrices de $T_k^{'p}(\mathbb{R})$; dans le cas p=0 on retrouve l'ensemble des matrices trigonalisables à valeurs propres simples.

Afin d'utiliser la compacité du groupe orthogonal nous allons rappeler le résultat suivant qui est une généralisation de la proposition 1:

Proposition 8. *Si la matrice A appartient à $\mathcal{M}_k^p(\mathbb{R})$ il existe une matrice orthogonale Q et une matrice $T \in T_k^p(\mathbb{R})$ telles que $Q^{-1}\mathrm{AQ} = T$.*

Soit la matrice A de $\mathcal{M}_k^p(\mathbb{R})$ son polynôme caractéristique se factorise comme suit $\prod_{i=1}^q (X - d_i) \prod_{j=1}^p R_j(X)$ où les $R_j(X)$ sont irréductibles et désignons par a l'endomorphisme qu'elle représente dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k)$ de $\mathbb{R}^k$.

Si $p = 0$ nous retrouvons la proposition 1; si $p \geqslant 1$ soit e'_1 un vecteur non nul dans le noyau de $R_1(a)$, la famille $(e'_1, a(e'_1))$ est libre et on peut l'orthonormaliser en (e''_1, e''_2), qui engendre un sous-espace stable par a; on peut la compléter en une base orthonormée $(e''_1, \ldots, e''_n)$ dans laquelle la matrice de a possède la structure en blocs suivante $\begin{pmatrix} A_1 & M \\ 0 & N \end{pmatrix}$ ($A_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M \in \mathcal{M}_{2,k-2}(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_{k-2}(\mathbb{R})$) et, comme le polynôme caractéristique de N est $\prod_{i=1}^q (X - d_i) \prod_{j=2}^p R_j(X)$, on continue ainsi.

Par suite, un raisonnement analogue à celui du Théorème 2. permet d'établir que, si une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_k^p(\mathbb{R})$ tend vers une matrice A, alors il existe donc une suite de matrices orthogonales $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de matrices T_n de $T_k^p(\mathbb{R})$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $Q_n^{-1} A_n Q_n = T_n$, c'est à dire $A_n = Q_n T_n Q_n^{-1}$.

Comme le groupe orthogonal $\mathcal{O}_k(\mathbb{R})$ est compact il existe une sous-suite $(Q_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice orthogonale Q, d'où $(A_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (Q_{\varphi(n)} T_{\varphi(n)} Q_{\varphi(n)}^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice QTQ^{-1}; comme pour tout n T_n est de la forme $\begin{pmatrix} M_{n,1} & * & * & \ldots & \ldots & .. & \ldots \\ 0 & M_{n,2} & * & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & M_{n,p} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & m_{n,1} & \ldots & \ldots \\ . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & * \\ 0. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & m_{n,q} \end{pmatrix}$ alors T=$\begin{pmatrix} M_1 & * & * & \ldots & \ldots & .. & \ldots \\ 0 & M_2 & * & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & M_p & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & m_1 & \ldots & \ldots \\ . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & * \\ 0. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & m_q \end{pmatrix}$ et i, M_i est la limite de la suite $(M_{n,i})$, elle pourra être éventuellement trigonalisable.

D'où la limite $A = \mathrm{QTQ}^{-1}$ appartient à $\mathcal{M}_k^r(\mathbb{R})$ où $r \leqslant p$.

Ce qui établit le

Théorème 9. *La limite d'une suite de matrices appartenant à $\mathcal{M}_k^p(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{M}_k^r(\mathbb{R})$ où*

r$\leqslant p$.

4 Quatrième figure: les cellules de $\mathbb{R}_k[X]$

Pour tout $p \in \left\{0, ..., E\left(\frac{k}{2}\right)\right\}$ nous désignerons par $\mathbb{R}_k^p[X]$ l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}_k[X]$, de degré k dont la factorisation en facteurs irréductibles contient p trinômes irréductibles du second degré; dans le cas $p=0$ on retrouve les polynômes scindés.

Nous allons nous appuyer sur les résultats du 3. concernant les matrices de $\mathcal{M}_k^p(\mathbb{R})$.

Théorème 10. *La limite d'une suite polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathbb{R}_k^p[X]$ appartient à $\mathbb{R}_k^r[X]$ où $r \leqslant p$.*

Par un raisonnement analogue à ceux des théorèmes et propositions 4,5,6,7 nous pouvons établir que, si une suite polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathbb{R}_k^p[X]$ converge vers un polynôme P, celui-ci appartient à $\mathbb{R}_k^r[X]$, où $r \leqslant p$.

5 Cinquième figure: polynômes simples et matrices compagnons

Rappelons que le discriminant d'un polynôme réel P(X), résultant des polynômes P(X) et P'(X), s'annule si et seulement si P(X) possède des facteurs multiples; il s'exprime comme un polynôme en les coefficients de P(X) et par suite l'ensemble des polynômes UNITAIRES de $\mathbb{R}[X]$ de degré k dont le discriminant est nul est un fermé; nous allons nous intéresser à l'ensemble Ω_k des polynômes unitaires simples de degré k, c'est à dire dont la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ ne contient aucun facteur multiple.

Pour tout $p \in \left\{0, ..., E\left(\frac{k}{2}\right)\right\}$ nous désignerons par $\Omega_k^{'p}$ l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients réels, de degré k, simples, qui possèdent p facteurs irréductibles de degré deux, premiers entre eux deux à deux, et $k-2p$ racines réelles distinctes.

De même nous désignerons pour tout $p \in \left\{0, ..., E\left(\frac{k}{2}\right)\right\}$ par $D_k^{'p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales par blocs de la forme suivante $\begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & ... & ... & .. & ... \\ 0 & D_2 & 0 & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & D_p & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & d_1 & ... & ... \\ . & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0. & ... & ... & ... & ... & 0 & d_q \end{pmatrix}$, où les D_j sont des matrices compagnons de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\theta_j \\ 1 & -\sigma j \end{pmatrix}$, distinctes deux à deux, où pour chaque entier j le polynôme caractéristique $X^2+\sigma_j X+\theta_j$ est irréductible et les d_i sont des réels distincts deux à deux.

Enfin nous désignerons par $\Gamma\left(\Omega_k^{'p}\right)$ l'ensemble des matrices compagnons des polynômes de $\Omega_k^{'p}$.

Théorème 11. *Soient un polynôme $A\in\Omega_{2m}^{'m}$ et la matrice compagnon $\Gamma(A)$, il existe une matrice $P\in\boldsymbol{GL}_k^+(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}\Gamma(A)P$ appartienne à $D_{2m}^{'m}(\mathbb{R})$.*

Soit $\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & ... & ... & -a_0 \\ 1 & 0 & ... & ... & ... & -a_1 \\ 0 & 1 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$ et a l'endomorphisme représenté par $\Gamma(A)$ dans la base canonique $\mathcal{B}=(e_1, ..., e_k)$ de $\mathbb{R}^k$, considérons la factorisation A(X)=$\prod_{j=1}^m R_j(X)$ où les $R_j(X)$ sont unitaires irréductibles, avec des facteurs distincts deux à deux et posons pour chaque j $Q_j(X)$=$\prod_{k\neq j} R_k(X)$; les trinômes $R_k(X)$ étant irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ leurs termes constants sont strictement positifs, et par suite il en est de même pour les termes constants des polynômes $Q_j(X)$.

Les deux vecteurs $\varepsilon_1 = Q_1(a)(e_1)$ et $\varepsilon_2 = Q_1(a)(e_2)$ engendrent le plan vectoriel Ker($(R_1(a))$, les vecteurs $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_3, ..., e_n)$ forment clairement une base et si $Q_1(X) = \sum_{i=0}^{2m-2} q_i X^i$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_{2m})$ à $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_3, ..., e_{2m})$ est $\begin{pmatrix} q_0 & 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ q_1 & q_0 & 0 & ... & ... & ... \\ ... & q_1 ... & 1 & ... & ... & .. \\ ... & ... & 0 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & q_{2m-2} & 0 & ... & ... & 1 \end{pmatrix}$ donc ces deux bases sont de même orientation.

Comme $a(e_3) = a_4$, $a(e_4) = e_5$, ..., $a(e_{2m-1}) = e_{2m}$, $a(e_{2m}) = -a_0 e_1 - a_1 e_2 - a_2 e_3 - ... - a_{2m-1} e_{2m} = u_1 \varepsilon_1 + u_2 \varepsilon_2 + u_3 e_3 - ... + u_{2m} e_{2m}$ et donc la matrice de a dans $\mathcal{B}'$ sera $\begin{pmatrix} D_1 & L_1 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$, avec $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 \\ 1 & -\sigma 1 \end{pmatrix}$, où $R_1(X) = X^2 + \sigma_1 X + \theta_1$, $L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & ... & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & . & ... & 0 & u_2 \end{pmatrix}$ et la matrice M_1 est une matrice compagnon; par ailleurs, comme le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} D_1 & L_1 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$ est égal au produit de celui de D_1 et celui de M_1, $M_1 = \Gamma(Q_1)$.

Si on pose $e'_{2m} = e_{2m} + \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2$, $a(e'_{2m}) = a(e_{2m}) + a(\alpha\varepsilon_1) + a(\beta\varepsilon_2) = u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + \alpha\varepsilon_2 + \beta(-\theta_1\varepsilon_1 - \sigma_1\varepsilon_2) + z + \mathrm{k}e_{2m}$ où $z \in \mathrm{Vect}(e_3, ..., e_{2m-1})$; d'où $a(e'_{2m}) = (u_1 - \theta_1\beta)\varepsilon_1 + (u_2 + \alpha - \sigma_1\beta)\varepsilon_2 + z + k(e'_{2m} - \alpha\varepsilon_1 - \beta\varepsilon_2) = (u_1 - k\alpha - \theta_1\beta)\varepsilon_1 + (u_2 + \alpha - \sigma_1\beta - k\beta)\varepsilon_2 + z + \mathrm{k}e'_{2m}$.

Le déterminant du système $\begin{cases} k\alpha + \theta_1\beta = u_1 \\ \alpha - (\sigma_1 + k)\beta = u_2 \end{cases}$ étant égal à $-(k^2 + \sigma_1 k + \theta_1)$ il est différent de 0, donc on peut trouver (α, β) tels que $a(e'_{2m})$ appartienne à Vect$(e_3, ..., e_{2m})$, la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_3, ... e_{2m-1}, e'_{2m})$ est une base de même orientation que $\mathcal{B}$, et la matrice de a dans cette base sera $\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$.

D'où on peut démontrer par récurrence qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\gamma_1, ..., \gamma_{2m})$, de même orientation que $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_{2m})$, dans laquelle l'endomorphisme a est représenté par la matrice $\begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & ... & ... & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & ... & 0 & ... \\ . & ... & ... & ... & ... & D_{m-1} & 0 \\ 0. & ... & ... & ... & ... & 0 & D_m \end{pmatrix}$, où les D_j sont des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\theta_j \\ 1 & -\sigma_j \end{pmatrix}$, telles que $R_j(X) = X^2 + \sigma_j X + \theta_j$.

Proposition 12. *Soient (p,k)* tels que $2p \leqslant k$, *deux polynômes unitaires* $(A, B) \in (\Omega_k'^p)^2$ *et les matrices compagnons associées* $\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & ... & ... & -a_0 \\ 1 & 0 & ... & ... & ... & -a_1 \\ 0 & 1 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$ *et* $\Gamma(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & ... & ... & -b_0 \\ 1 & 0 & ... & ... & ... & -b_1 \\ 0 & 1 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 1 & -b_{k-1} \end{pmatrix}$, *il existe deux matrices (P,Q)*$\in \boldsymbol{GL}_k^+(\mathbb{R})^2$ *et deux matrices* $(D(A), D(B)) \in D_k'^p(\mathbb{R})^2$ *telles que* $D(A) = P^{-1}\Gamma(A)P$ *et* $D(B) = Q^{-1}\Gamma(B)Q$.

Si $2p = k$ le résultat découle de l'application du théorème précédent aux matrices $\Gamma(A)$ et $\Gamma(B)$.

Supposons $2p < k$, soit a l'endomorphisme représenté par $\Gamma(A)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_k)$ de $\mathbb{R}^k$, considérons la factorisation de A(X), A(X)$= \prod_{j=1}^{p} R_j(X) \prod_{i=1}^{q} (X - d_i)$ où les $R_j(X)$ sont unitaires irréductibles, avec des facteurs distincts deux à deux, comme 2p<k alors $q \geqslant 1$ et $\mathbb{R}^k = \oplus_{j=1}^{p} \mathrm{Ker}(R_j(a)) \oplus \oplus_{i=1}^{q} \mathrm{Ker}(a - d_i \mathrm{Id})$; d'où l'existence d'une base $(\varepsilon_1, \varepsilon'_1, ..., \varepsilon_p, \varepsilon'_p, \varphi_1, ..., \varphi_q)$, dans laquelle a est représenté par une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & ... & ... & .. & ... \\ 0 & A_2 & 0 & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & A_p & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & \alpha_1 & ... & ... \\ . & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0. & ... & ... & ... & ... & 0 & \alpha_q \end{pmatrix}$; pour que les blocs soient exactement des matrices compagnons $A_j = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_j \\ 1 & -\sigma_j \end{pmatrix}$, il suffit de choisir dans chaque plan vectoriel Ker($(R_j(a))$ une base constituée d'un vecteur v_j et de son image a(v_j); on remarquera au passage que le polynôme caractéristique de $a_{|R_j(a)}$, $X^2 + \sigma_j X + \theta_j$, est égal à son polynôme minimal $R_j(X)$.

Il existe donc P$\in \boldsymbol{GL}_k(\mathbb{R})$ tel que $D(A)=P^{-1}\Gamma(A)P$; pour que P$\in \boldsymbol{GL}_k^+(\mathbb{R})$ il est nécessaire que la base $(v_1, a(v_1), ..., v_p, a(v_p), \varphi_1, ..., \varphi_q)$ soit directe; ceci sera possible, en remplaçant si nécessaire l'un des vecteurs φ_i par son opposé (il en a au moins un puisque $q \geqslant 1$) et ainsi nous obtenons une base directe dans laquelle a est représenté par la matrice $D(A)$, d'où une matrice $P \in \boldsymbol{GL}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $D(A)=P^{-1}\Gamma(A)P$ de $D_k'^p(\mathbb{R})$; on fera de même pour B.

Théorème 13. *Les $\Omega_k'^p$ sont les composantes connexes de l'ouvert Ω_k*

Soient deux polynômes unitaires $(A,B) \in \Omega_k'^p[X]^2$ et les matrices compagnons associées $\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & ... & ... & -a_0 \\ 1 & 0 & ... & ... & ... & -a_1 \\ 0 & 1 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$ et $\Gamma(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & ... & ... & -b_0 \\ 1 & 0 & ... & ... & ... & -b_1 \\ 0 & 1 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 1 & -b_{k-1} \end{pmatrix}$ les deux matrices (P,Q)$\in \boldsymbol{GL}_n^+(\mathbb{R})^2$ et les deux matrices $(D(A), D(B)) \in D_k^p(\mathbb{R})^2$ telles que $\Gamma(A)$=PD$(A)P^{-1}$ et $\Gamma(B)$=QD$(B)Q^{-1}$; D(A) et D(B) sont de la forme

$$\mathrm{D(A)}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & * & ... & ... & .. & ... \\ 0 & A_2 & 0 & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & A_p & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & \alpha_1 & ... & ... \\ . & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0. & ... & ... & ... & ... & 0 & \alpha_q \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{D(B)}=\begin{pmatrix} B_1 & 0 & * & ... & ... & .. & ... \\ 0 & B_2 & 0 & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & B_p & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & \beta_1 & ... & ... \\ . & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0. & ... & ... & ... & ... & 0 & \beta_q \end{pmatrix},$$ où les matrices A_j et B_j

sont des matrices compagnons de la forme $A_j = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_j \\ 1 & -\sigma_j \end{pmatrix}$, où $\sigma_j^2 - 4\theta_j < 0$, et $B_j = \begin{pmatrix} 0 & -\pi_j \\ 1 & -\eta_j \end{pmatrix}$, où $\eta_j^2 - 4\pi_j < 0$; les matrices A_j et B_j sont ordonnées de telle sorte que $(\theta_1, \sigma_1) < (\theta_2, \sigma_2) < ... < (\theta_p, \sigma_p)$ et $(\eta_1, \pi_1) < (\eta_2, \pi_2) < ... < (\eta_p, \pi_p)$ (pour l'ordre lexicographique) et les scalaires sont aussi classés par ordre croissant: $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_q$ et $\beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_q$.

Pour prouver l'existence d'un chemin continu de D(B) vers D(A) à valeurs dans $D_k^p(\mathbb{R})$ il suffit de montrer l'existence d'un chemin continu f: $t \longmapsto$ ta $+$ $(1-t)b$ du 2p+q uplet a=$(\theta_1, \sigma_1, ..., \theta_p, \sigma_p, \alpha_1, ..., \alpha_q)$ vers le 2p+q uplet b=$(\eta_1, \pi_1, ..., \eta_p, \pi_p, \beta_1, ..., \beta_q)$, tel que

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1], \forall j \in \{1, ..., p\}, \{t\sigma_j + (1-t)\pi_j\}^2 < 4\{t\theta_j + (1-t)\eta_j\} \\ \forall t \in [0,1], \forall (u,v)\{1, ..., p\}^2, u \neq v \Longrightarrow (t\theta_u + (1-t)\eta_u, t\sigma_u + (1-t)\pi_u) \neq (t\theta_v + (1-t)\eta_v, t\sigma_v + (1-t)\pi_v) \\ \forall t \in [0,1], \forall (i,j)\{1, ..., q\}^2, i \neq j \Longrightarrow t\alpha_i + (1-t)\beta_i \neq t\alpha_j + (1-t)\beta_j \end{cases}$$

Ces trois conditions sont faciles à vérifier, elles découlent de la convexité de l'ensemble des points du plan tels que $y^2 < 4x$ et du classement strictement croissant décrit au-dessus.

Comme les matrices inversibles P et Q appartiennent à $\boldsymbol{GL}_k^+(\mathbb{R})$, qui est connexe par arcs, il existe un chemin continu G, à valeurs dans $\boldsymbol{GL}_k^+(\mathbb{R})$, tel que $G(0) = Q, G(1) = P$ et $\forall t \in [0,1]$, $G(t) \in \boldsymbol{GL}_k^+(\mathbb{R})$.

D'où un chemin continu h, à valeurs dans $\mathcal{M}_k'^p(\mathbb{R})$, défini pour tout $t \in [0, 1]$ par $h(t) = G(t)\begin{pmatrix} C_1(t) & 0 & * & ... & ... & .. & ... \\ 0 & C_2(t) & 0 & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & C_p(t) & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & \gamma_1(t) & ... & ... \\ . & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0. & ... & ... & ... & ... & 0 & \gamma_q(t) \end{pmatrix}G(t)^{-1}$, où $\forall j \in \{1, ..., p\}$, $\forall t \in [0, 1]$, $C_j(t) = \begin{pmatrix} 0 & -t\theta_j - (1-t)\pi_j \\ 1 & -t\sigma_j - (1-t)\eta_j \end{pmatrix}$ et $\forall i \in \{1, ..., q\}$, $\forall t \in [0, 1]$, $\gamma_i(t) = t\alpha_i + (1-t)\beta_i$; ce qui constitue un chemin continu de $\Gamma(B)$ vers $\Gamma(A)$, à valeurs dans $\mathcal{M}_k'^p(\mathbb{R})$; comme l'application qui associe à toute matrice de $\mathcal{M}_k'^p(\mathbb{R})$ son polynôme caractéristique est continue, le chemin continu de $\Gamma(A)$ vers $\Gamma(B)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_k'^p(\mathbb{R})$ induit un chemin continu du polynôme A vers le polynôme B, à valeurs dans $\Omega_k'^p$.

Je remercie Maurice Arrigoni dont les conversations m'ont permis d'avancer dans cette étude.