Une formule combinatoire

par Patrick Teller

Résumé

On considère une partition décroissante $(t_1, ..., t_p)$ d'un entier n et la partition duale $(z_1, ..., z_{t_1})$ définie par la relation $\forall k \in [\![1, ..., t_1]\!], z_k = |i, t_i \geqslant k|$.

Le calcul, sous deux formes différentes de la dimension du commutant d'une matrice en blocs de Jordan (et de sa semblable sous forme de Weyr [1]), a permis d'établir la formule

$\sum_{k=1...t_1} z_k^2 = \sum_{(i,j) \in [\![1,...,p]\!]^2} \min(t_i, t_j)$.

On trouvera ici deux démonstrations directes de cette formule.

Exemple 1.

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	0	0
1	0	0	0

$t_1=5, t_2=3, t_3 = 2, t_4=2$

$z_1=4, z_2=4, z_3=2, z_4 = 1, z_5 = 1$

$\sum_{k=1...t_1} z_k^2 = 16 + 16 + 4 + 1 + 1 = 38$

min	5	3	2	2
5	5	3	2	2
3	3	3	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
$t4$				

$\sum_{(i,j) \in [\![1,...,p]\!]^2} \min(t_i, t_j) = 5 + 3 + 2 + 2 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 38$

1 Par le calcul

De la définition de la partition $(z_1, ..., z_{t_1})$ découle immédiatement que

le nombre de t_i égaux à 1 est $z_1 - z_2$

le nombre de t_i égaux à 2 est $z_2 - z_3$

....

le nombre de t_i égaux à k est $z_k - z_{k+1}$

....

le nombre de t_i égaux à t_1 est $z_{t_1} - 0$.

$\sum_{(i,j) \in [\![1,...,p]\!]^2} \min(t_i, t_j) = \sum_{k \in [\![1,...,t_1]\!]} \sum_{(i,j), \min(t_i,t_j)=k} k$.

et $\min(t_i,t_j)=k \Longleftrightarrow t_i > k, t_j = k \vee t_i = k, t_j > k \vee t_i = k, t_j = k$, donc le nombre de couples (i,j) tels que $\min(t_i,t_j)=k$ est égal à $2z_{k+1}(z_k - z_{k+1}) + (z_k - z_{k+1})(z_k - z_{k+1}) = z_k^2 - z_{k+1}^2$.

Par suite $\sum_{k \in [\![1,...,t_1]\!]} \sum_{(i,j), \min(t_i,t_j)=k} k = \sum_{k \in [\![1,...,t_1]\!]} k(z_k^2 - z_{k+1}^2) = \sum_{k=1...t_1} z_k^2$.

2 Par le calcul matriciel

On définit la matrice M$\in\mathcal{M}_{t_1,p}(Z)$ par ses colonnes comme suit:

M$=(M_1,...,M_p)$ où la colonne M_j contient t_j « 1 », suivis de $t_1 - t_j$ « 0 ».

Par suite si on considère les lignes de M, M$=\begin{pmatrix} L_1 \\ .... \\ .... \\ L_{t_1} \end{pmatrix}$ la ligne L$_k$ contient z_k « 1 », suivis de p-z_k « 0 ».

On désigne par V le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$ (p lignes).

Alors MV$=\begin{pmatrix} z_1 \\ .... \\ .... \\ z_{t_1} \end{pmatrix}$ et ^{t}V^{t}MMV$=\sum_{k=1...t_1} z_k^2$.

D'autre part le produit ^{t}M$_i M_j$ est égal à $\min(t_i, t_j)$, d'où ^{t}MM$=(\min(t_i, t_j))$ et il en découle que ^{t}V^{t}MMV$=\sum_{(i,j)\in[\![1,...,p]\!]^2} \min(t_i, t_j)$.

Mars 2019

Bibliographie:

[1] P. Teller, http://lalgebrisant.fr/images/pdfArticles/LuniversDesMatricesFractales.pdf