Etude élémentaire de l'équation matricielle de Sylvester AX-XB=C

Patrick Teller

septembre 2023

1 Introduction

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_p(K)$ où K est un corps commutatif quelconque, on appellera fonction de Sylvester $s(A, B)$ attachée au couple (A, B) la fonction qui, à toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, associe la matrice $AM - MB \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$; la relation $AM - MB = C$ est essentiellement utilisée comme décrivant la matrice M de manière implicite.

On sait que $s(A, B)$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ si et seulement si les spectres de A et B sont disjoints (ou leurs polynômes minimaux premiers entre eux) et dans ce cas l'application réciproque existe, c'est aussi un automorphisme et sa dépendance par rapport à A et B est polynomiale.

Ce cas sera appelé "cas général" tandis que l'on parlera de "cas singulier" lorsque les spectres ne sont pas disjoints. Le cas général a été abondamment étudié (on pourra se référer à la liste non exhaustive citée dans l'article [7]).

Dans les cas singuliers se posent au moins trois problèmes :

i) Déterminer des conditions sur C pour qu'il existe M telle que $AM - MB = C$.

ii) Décrire une base du sous-espace vectoriel $S(A, B)$, image de l'application $s(A, B)$.

iii) Déterminer une solution particulière M en fonction de C.

iv) Eventuellement étudier la dépendance de cette solution en fonction de C (continuité , ..)

Face à la grande quantité de travaux qui portent sur le cas "général" peu d'articles considèrent le cas "singulier", on citera Z-Y. Li et B.Zhou [7], M.Dincic[4] ; chacun est conçu en supposant aux matrices A et B une structure particulière, le premier se place dans le cadre de la décomposition spectrale, le deuxième privilégie la forme de Jordan.

Dans [7] les calculs sont extrêmement longs et les formules compliquées ; les matrices A, B, C étant astreintes à la forme "idempotent+nilpotent".

Dans [4] les conditions d'existence et les solutions particulières sont présentées ex-nihilo (mais vérifiées). Pour être effective une méthode devrait permettre une double circulation : à partir de deux matrices A et B on déterminera deux matrices A' et B', respectivement semblables à A et B, pour lesquelles on saura étudier l'équation de Sylvester, puis, si c'est le cas, la résoudre en fonction de A' et B', et ensuite en déduire la résolution de l'équation d'origine, en fonction de A et B. Dans le cas de [4] le choix de regrouper les blocs de Jordan en fonction du critère "spectres identiques"-"spectres disjoints" allège l'étude mais rend trop complexe la restitution des résultats.

Nous avons préféré aborder l'équation de Sylvester dans le cas singulier lorsque les matrices A et B sont des matrices compagnons, puis proposer l'extension de l'étude aux produits directs de matrices compagnons ; en fait le cas général apparaîtra comme un cas particulier.

Le paragraphe 1 concerne l'aspect affine de l'équation $AX - XB = C$.

Le paragraphe 2 introduit les outils nécessaires, matrices compagnons, polynômes adjoints d'un polynôme, la formule du Nivellateur qui permettra de raisonner sur la relation de Sylvester par équivalences et permet de décrire le noyau de l'application linéaire associée à $s(A, B)$.

Le paragraphe 3 étudie les fonctions polynomiales des matrices compagnons, en particulier le rang de la matrice $P(M)$ lorsque M est une matrice compagnon ainsi que la détermination d'une matrice carrée extraite de rang maximal.

Le paragraphe 4 établit une Condition Nécessaire et Suffisante pour l'existence d'une matrice M telle que $AM - MB = C$, en fonction des colonnes de C ainsi qu'une formule explicite pour une solution particulière de l'équation, appelée "solution standard". La "solution standard" dépend continument de C et elle se confond avec la solution unique dans le cas "non singulier".

Le paragraphe 5 établit la dimension de l'espace vectoriel $S(A, B)$ des matrices C qui possèdent un antécédent par $s(A, B)$.

Le paragraphe 6 aborde le cas des matrices quelconques au moyen d'une réduction de Frobenius allégée ; l'équation $AM - MB = C$ est remplacée par une famille d'équations $A'_u M'_{u,v} - M'_{u,v} B'_v = C'_{u,v}$, qui s'étudient chacune en fonction des matrices $\Pi_{Bv}(A_u)$ et $\Pi_B^{[1]}(A)C_1 + \Pi_B^{[2]}(A)C_2 + .. + \Pi_B^{[p]}(A)C_p$.

Les matrices considérées sont à coefficients dans un corps commutatif K.

1.1 Solution particulière, solution générale

L'équation $AX - XB = C$, où X est l'inconnue, est une équation affine, l'ensemble des solutions est un espace affine, dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation linéaire associée. L'essentiel sera la recherche d'une solution "particulière" de l'équation affine.

2 Quelques outils indispensables

Définition 1. *Polynômes adjoints d'un polynôme $P(X)$.*
Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ on désignera pour $k = 0, .., p$ par $P^{[k]}(X)$ le polynôme $\sum_{i=k}^{p} a_i X^{i-k}$.

Les polynômes successifs qui apparaissent dans le schéma de Horner d'un polynôme $P(X)$ sont, dans l'ordre inverse, les polynômes adjoints de $P(X)$.

Lemme 1. *Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ alors pour tout k de $\in \{0, .., p\}$ $P^{[k]}(X) = XP^{[k+1]}(X) + a_k$.*

Démonstration. Découle de la définition. □

Définition 2. *Matrices compagnons*
Une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & .. & .. & 0 & -a_1 \\ & .. & .. & .. & .. & .. \\ & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

sera dite "compagnon"; son polynôme caractéristique est égal à son polynôme minimal

$$X^k + a_{k-1}X^{k-1} + ... + a_0.$$

Nous noterons $\Pi_M(X)$ le polynôme minimal d'une matrice M. Nous aurons souvent recours à A et B deux matrices compagnons de tailles respectives n et p et C désignera un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & .. & .. & 0 & -a_1 \\ & .. & .. & .. & .. & .. \\ & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & .. & .. & 0 & -b_1 \\ & .. & .. & .. & .. & .. \\ & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & 1 & -b_{p-1} \end{pmatrix}$$

Définition 3. *On appelle vectorisation d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{p,q}(M)$, dont on désignera les colonnes par $M_1, .., M_q$, sa transformation en un vecteur $\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ .. \\ M_q \end{pmatrix}$, obtenu en écrivant ses colonnes l'une après l'autre.*

Définition 4. *La formule du Nivellateur*
Soient $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_p(K) \times \mathcal{M}_{n,p}(K)$, en vectorisant on transforme l'équation $AM - MB = C$ en l'équation équivalente

$$(I_p \otimes A - {}^tB \otimes I_n) \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ .. \\ M_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ .. \\ C_p \end{pmatrix}.$$

qui est appelée "formule du Nivellateur".

Lorsque A et B sont des matrices compagnons la formule du Nivellateur s'écrit

$$(I_p \otimes A - {}^tB \otimes I_n) = \begin{pmatrix} A & -I & 0 & .. & .. & ... & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .. & .. & .. & .. & .. & .. & \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & A & -I \\ b_0 I & b_1 I & . & . & . & .... & . & b_p - 1I + A \end{pmatrix}.$$

La relation $AM - MB = C$ est équivalente à

$$\begin{pmatrix} A & -I & 0 & .. & .. & .. & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .. & .. & .. & .. & .. & .. & \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & A & -I \\ b_0 I & b_1 I & . & . & . & .... & . & b_{p-1} I + A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ .. \\ .. \\ .. \\ X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ .. \\ .. \\ .. \\ C_p \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} M_2 = AM_1 - C_1 \\ .. \\ \\ M_p = AM_{p-1} - C_{p-1} \\ b_0 M_1 + b_1 M_2 + ... + b_{p-1} M_p + AM_p = C_p \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} M_2 = AM_1 - C_1 \\ .. \\ b_0 M_1 + .. + b_{p-1}(A^{p-1} M_1 - A^{p-2} C_1 - C_{p-1}) + AM_p = C_p \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} M_2 = AM_1 - C_1 \\ .. \\ M_p = AM_{p-1} - C_{p-1} \\ \Pi_B(A) M_1 = \Pi_B^{[1]}(A) C_1 + \Pi_B^{[2]}(A) C_2 + .. + \Pi_B^{[p]}(A) C_p. \end{cases}$$

où $\Pi_B^{[k]}(X)$ désigne le polynôme $\sum_{j=k}^{p} b_j X^{j-i}$.

D'où le noyau de l'application linéaire associée à $s(A, B)$:

Proposition 1. *$AM - MB = 0$ si seulement si $\Pi_B(A) M_1 = 0$ et $M_2 = AM_1, M_3 = AM_2, ... = M_p = AM_{p-1}$.*

Démonstration. Il suffit de considérer la formule au-dessus en posant $C_1 = C_2 = ... = C_p = 0$ $\square$

Remarque: 1. *On en déduit aussi que $s(A,B)(M)$=0 et M_1=0 alors M=0. Autrement dit si deux matrices M et N ont la première colonne identique et la même image par la fonction de Sylvester $s(A,B)$ elles sont égales*

3 L'espace des colonnes des puissances d'une matrice compagnon

Rappelons, comme nous l'avons déjà utilisé plus haut, que, si on considère un polynôme $P(X)$, la matrice $P(A)$ est inversible si et seulement si $P(X)$ est premier avec $\Pi_A(X)$.

Théorème 1. *Soit un polynôme $P(X) = X^r + \sum_{i=0}^{p-1} p_i X^i$, où $p_0 \neq 0$*

1. *Si $P(X)$ divise $\Pi_A(X)$ la matrice $P(A)$ est de rang $n-r$, les n-r premières colonnes de $P(A)$ constituent une base de l'espace des colonnes de $P(A)$ et les $n-r$ dernières lignes constituent une base de l'espace des lignes de $P(A)$;*
2. *Si $P(X)$ ne divise pas $\Pi_A(X)$ et si on pose $Z(X) = P(X) \wedge \Pi_A(X)$, les espaces engendrés par les colonnes de la matrice $P(A)$ et par les colonnes de la matrice $Z(A)$ sont identiques, de même que les espaces engendrés par les lignes de la matrice $P(A)$ et par les lignes de la matrice $Z(A)$, tous de dimension $n-d$, où d désigne le degré de $Z(X)$.*
3. *Dans tous les cas la matrice extraite de $P(A)$ formée par $n-d$ premières colonnes et les $n-d$ dernières lignes est une matrice carrée extraite de rang maximal ;*

on trouvera une partie de ce résultat dans [1]

Démonstration. 1. On suppose que $P(X)$ divise $\Pi_A(X)$ et on désigne par $\Gamma_1(P), ..\Gamma_n(P)$ les colonnes de $P(A)$, alors pour tout k de $\{0, .., n-1\}$, $\Gamma_{k+1}(P) = A\Gamma_k(P)$. Il est immédiat que $\Gamma_1(P) = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ .. \\ p_{r-1} \\ 1 \\ .. \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ .. \end{pmatrix}$ $\Gamma_2(P) =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ p_0 \\ p_1 \\ .. \\ p_{r-1} \\ 1 \\ .. \\ 0 \\ 0 \\ ... \end{pmatrix}, ..., \Gamma_{n-r}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ .. \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ p_0 \\ p_1 \\ .. \\ p_{r-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

La forme des colonnes $\Gamma_1(P), .., \Gamma_{n-r}(P)$ entraine leur indépendance linéaire ; D'autre part soit $Q(X)$ tel que $P(X)Q(X) = \Pi_A(X)$; alors pour tout $k \in \{1, .., n\}$ $Q(A)P(A)(e_k) = \Pi_A(A)(e_k) = 0$ où $(e_1, .., e_n)$ designe la base canonique de K^n, d'où $Q(A)\Gamma_k(P) = 0$ pour tout $k \leq r$. C'est-à-dire $(\sum_{i=0}^{n-r-1} q_i A^i + A^{n-r})\Gamma_k(P) = 0$, qui se traduit par la relation $\sum_{i=0}^{n-r-1} q_i \Gamma_{i+k}(P) + \Gamma_{n-r+k}(P) = 0$ pour tout $k \leq r$. D'où $\forall k \leq r, \Gamma_{n-r+k}(P) \in Vect(\Gamma_k(P), .., \Gamma_{n-r}(P))$. Il en découle que lorsque $P(X)$ divise $\Pi_A(X)$ les $n-r$ premières colonnes de $P(A)$ forment une base de l'espace de ses colonnes ; par suite le rang de la matrice $P(A)$ est égal à $n-r$ et la forme des lignes de $P(A)$ entraine que les $n-r$ dernières lignes forment une base de l'espace des lignes de $P(A)$;

2. Si $P(X)$ ne divise pas $\Pi_A(X)$ posons $Z(X) = P(X) \wedge \Pi_A(X)$ dont nous désignerons le degré par d, alors il existe un polynôme $W(X)$ tel que $P(A) = Z(A)W(A) = W(A)Z(A)$ d'où les lignes de $P(A)$ sont des combinaisons linéaires de celles de $Z(A)$ et les colonnes de $P(A)$ sont des combinaisons linéaires de celles de $Z(A)$; D'autre part le Théorème de Bezout entraine l'existence de deux polyômes $U(X)$ et $V(X)$ tels que $U(X)P(X)+V(X)\Pi_A(X) = Z(X)$ et $P(X)U(X)+\Pi_A(X)V(X) = Z(X)$, d'où $U(A)P(A) = Z(A)$ et $P(A)U(A) = Z(A)$, d'où les colonnes de $Z(A)$ sont des combinaisons linéaires de celles de $P(A)$ et les lignes de $Z(A)$ sont des combinaisons linéaires de celles de $P(A)$;

3. On peut appliquer à $Z(A)$ le résultat du 1 et l'étendre à $P(A)$ en vertu du 2.,

$\square$

4 Une condition nécessaire et suffisante pour la solvabilité de l'équation

Remarque: 2. *Rappelons que dans le cas de matrices compagnons l'égalité* $AM - MB = C$ *est équivalente au système*

$$\begin{cases} M_2 = AM_1 - C_1 \\ .. \\ .. \\ M_p = AM_{p-1} - C_{p-1} \\ \Pi_B(A)M_1 = \Pi_B^{[1]}(A)C_1 + \Pi_B^{[2]}(A)C_2 + .. + \Pi_B^{[p]}(A)C_p. \end{cases}$$

Les conditions posées par ce système sont d'ordres différents : La condition $\Pi_B(A)M_1 = \Pi_B^{[1]}(A)C_1 + \Pi_B^{[2]}(A)C_2 + .. + \Pi_B^{[p]}(A)C_p$ *s'impose à* C *et détermine, le cas échéant, la valeur de* M_1 *(**) ; c'est donc une Condition Nécessaire.*

Les conditions "$\forall k \in [2;p] M_k = AM_{k-1} - C_{k-1}$*" détermine, à partir de la valeur de* M_1*, les valeurs des autres vecteurs colonnes* $M_2, .., M_{p-1}$ *(***), d'où la valeur de* M*.*

L'équivalence entre les systèmes assure que la condition (**) est suffisante pour que C *appartienne à* $S(A, B)$*.*

D'où

Proposition 2. *La Condition Nécessaire et Suffisante*

La matrice C *appartient à* $S(A, B)$ *si et seulement il existe* M_1 *tel que* $\Pi_B(A)M_1 = \Pi_B^{[1]}(A)C_1 + \Pi_B^{[2]}(A)C_2 + .. + \Pi_B^{[p]}(A)C_p$*.*

Proposition 3. *Détermination effective d'une solution "particulière" de* $AM - MB = C$*.*

Soit $\Pi_B(A) = \begin{pmatrix} U & U' \\ T & T' \end{pmatrix}$ *où* $(U, U', T, T')) \in \mathcal{M}_{d,n-d}(K) \times \mathcal{M}_{d,d}(K) \times \mathcal{M}_{n-d,n-d}(K) \times \mathcal{M}_{n-d,d}(K)$ *et* T *est une matrice extraite de rang maximal de* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & T' \end{pmatrix}$*.*

i) Il existe une matrice unique Q *telle que* $U = QT$ *et* $U' = QT'$*.*

ii) On pose $\Pi_B^{[1]}(A)C_1 + \Pi_B^{[2]}(A)C_2 + .. + \Pi_B^{[p]}(A)C_p = \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$*,*

le système $\begin{pmatrix} U & U' \\ T & T' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ *possède des solutions si et seulement si* $V = QW$*.*

iii) Si le système $\begin{pmatrix} U & U' \\ T & T' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ *est résoluble il possède une solution unique de la forme* $\begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$*, elle s'écrit* $\begin{pmatrix} T^{-1}Y \\ 0 \end{pmatrix}$*.*

iv) Une solution de l'équation $AX - XB = C$ *a pour expression* $M = [M_1, M_2, ..., M_p]$*, où* $M_1 = \begin{pmatrix} T^{-1}W \\ 0 \end{pmatrix}, M_2 = AM_1, ..., M_p = AM_{p-1}$*.*

Démonstration. i) Il a été montré plus haut que T est une matrice carrée extraite de rang maximal. La multiplication par Q représente les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice $\Pi_B(A)$ qui annulent les d premières lignes ; l'unicité découle du fait que les lignes de T sont linéairement indépendantes
ii) Le système $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & T' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ possède des solutions donc les opérations élémentaires qui annulent les premières lignes du membre de gauche doivent annuler les mêmes lignes du membre de droite.
iii) $\begin{pmatrix} U & U' \\ T & T' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & T' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ W \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \mathrm{Y}{=}\mathrm{T}^{-1}W \\ Z = 0 \end{cases}$$

iv) Une fois déterminée la valeur de la première colonne M_1, les valeurs de $M_2, .., M_p$ sont imposées par le système issu de la formule du Nivellateur.

□

Définition 5. *Deux solutions de l'équation $AX - XB = C$ qui auraient la même première colonne sont identiques (remarque 2) donc il n'existe qu'une unique solution M de la forme $\begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$, elle sera désignée sous le nom de "solution standard". La solution standard a pour expression $M_1 = \begin{pmatrix} T^{-1}W \\ 0 \end{pmatrix}$,$M_2 = AM_1 - C_1, ..., M_p = AM_{p-1} - C_{p-1}$.*

Théorème 2. *L'application qui associe à toute matrice C pour laquelle l'équation $AX - XB = C$ possède des solutions, la solution standard est une fonction continue de C.*

Démonstration. La matrice $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \Pi_B^{[1]}(A)C_1 + \Pi_B^{[2]}(A)C_2 + .. + \Pi_B^{[p]}(A)C_p$ dépend continuement de C, par suite W, sa projetée sur un sous-espace vectoriel fixe dépend aussi continument de C. La continuité de $AM_k - C_k$ est immédiate ; d'où la continuité de la solution standard.

□

Remarque: 3. *Dans le cas général la matrice $\Pi_B(A)$ est inversible et $M_1 = (\Pi_B(A))^{-1}(\Pi_B^{[1]}(A)C_1 + \Pi_B^{[2]}(A)C_2 + .. + \Pi_B^{[p]}(A)C_p)$, comme dans ce cas l'application de Sylvester est une bijection, cette solution est la solution standard. La méthode proposée pour le cas singulier (mais "compagnon") est donc universelle (face à A et B compagnons).*

5 La dimension de S(A,B)

Proposition 4. *Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_p(K)$, des matrices compagnons et d la dimension de $Ker(\Pi_B(A)$, qui est égale au degré de $\Pi_A(X) \wedge \Pi_B(X)$*

l'ensemble des matrices C telles qu'il existe M vérifiant $AM - MB = C$ est un espace vectoriel de dimension $np - d$.

Démonstration. Comme la dimension du noyau de l'application linéaire associée à $s(A, B)$ est égale à celle du noyau de $\Pi_B(A)$, c'est-à-dire au degré d de $\Pi_A(X) \wedge \Pi_B(X)$, il en découle que la dimension de l'image $S(A, B)$ de l'application $s(A, B)$ est égale à $np - d$. $\square$

6 L'équation de Sylvester dans le cas où les matrices A et/ou B ne sont pas des matrices compagnons

Soit donc l'équation matricielle $AM - MB = C$.

6.1 Extension au cas quelconque

Du point de vue théorique il suffit d'invoquer le Théorème de Frobenius, éventuellement sous une forme faible : toute matrice à coefficients dans K est semblable à une somme directe de matrices compagnons.

La liste des tâches à effectuer est banale :

1) Pour A et B obtenir les matrices $P^{-1}AP$ et $Q^{-1}BQ$ respectivement semblables à des sommes directes de matrices compagnons $\oplus A'_u$ et $\oplus B'_v$

$$A' = \begin{pmatrix} A'_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & A'_2 & .. & 0 \\ .. & .... & ... & ... \\ 0 & 0 & .. & A'_n \end{pmatrix}$$

et

$$B' = \begin{pmatrix} B'_1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & B'_2 & 0 & .. & 0 \\ ... & .... & ... & ... & \\ 0 & 0 & 0 & .. & B'_p \end{pmatrix}$$

2) Conserver P et Q pour la restitution des résultats

3) Etudier, le cas échéant résoudre, le système

$$\left\{ A'_u M'_{uv} - M'_{uv} B'_v = C'_{uv}, (u, v) \in [1, .., n] \times [1..p] \right.$$

où $M' = P^{-1}MQ$ et $C' = P^{-1}CQ$.

4) Si on désigne par $M'_{u,v}$ les différentes solutions la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} M'_{11} & M'_{12} & .. & M'_{1,p} \\ M'_{21} & .. & & \\ .. & .... & ... & ... \\ M'_{n1} & .. & .. & M'_{np} \end{pmatrix}$$

sera une solution de l'équation $A'M' - M'B' = C'$.

5) $PM'Q^{-1}$ sera solution de l'équation $AM - MB = C$.

4bis) Si on désigne par $M'_{u,v}$ les différentes solutions STANDARD la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} M'_{11} & M'_{12} & .. & M'_{1,p} \\ M'_{21} & .. & & \\ .. & .... & ... & ... \\ M'_{n1} & .. & .. & M'_{np} \end{pmatrix}$$

sera LA solution STANDARD de l'équation $A'M' - M'B' = C'$.

5bis) et $PM'Q^{-1}$ sera LA solution STANDARD de l'équation $AM - MB = C$.

6.2 Réduire la Complexité

Les tâches 2), 5) et 5bis) impliquent la détermination des matrices P et Q, le calcul de leurs inverses, leur utilisation dans des multiplications et leur conservation en mémoire ; la méthode de Danilevsky ([3], [9]), en considérant P et Q comme des produits de transvections, permet à la fois un stockage économique en mémoire et des calculs de moindre complexité.

Références

[1] *S.Barnett, Polynomials and Linear Control Systems. Marcel Dekker, New York,1983*

[2] *S. Bouarga, M.E. Charkani, Polynomial Solution of Sylvester Matrix Equation, International Journal of Algebra, vol 9, 2015, n°4, p.185-194*

[3] *A.M.Danilevsky, The numerical solution of the secular equation (Russe), Math. Sbornik 44,1937, n°2,p.169-171.*

[4] *M.Dincic, Solving the Sylvester Equation $AX - XB = C$ when $Spec(A) \cap Spec(B) \neq \emptyset$, Electronic Journal of Linear Algebra, vol 35,p.1-28*

[5] *N.V. Faddeeva,Computational Methods of Linear Algebra, Dover Books on Advanced Mathematics, New-York, 1959*

[6] *, Q.Hu, D.Chenp.The Polynomial Solution to the Sylvester Matrix Equation,Applied Mathematical Letter, vol 19,p.859-864*

[7] *Z.y. Li,H.Zhou, Spectral Decomposition based Solutions to the matrix equation AX-XB=C, IET Control Theory and Applications, 2018, vol12,p119-128.*

[8] *,P.Ozello, Calcul exact des formes de Jordan et Frobenius d'une matrice, Thèse, Modélisation et Simulation, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1987.*

[9] *Patrick Teller, Le secret de Danilevsky et Faddeeva, https ://www.lalgebrisant.fr*