Comment réduire à la main une Matrice Non Négative

Patrick Teller

Pour éviter les querelles linguistiques
Non négatif ≥ 0 Matrices non négatives
Positif > 0 Matrices à diagonale positive

1 Matrices non négatives irréductibles

Définition 1. *matrice irréductible*

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(R^{+*})$ est dite réductible lorsqu'il existe une matrice de permutation P telle que ${}^tPMP$ est de la forme $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$*, où* $(B, D) \in \mathcal{M}_p(R^{*+}) \times \mathcal{M}_{n-p}(R^{*+})$ *et* $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(R^{*+})$

Théorème 1. *Caractérisation de l'irréductibilité par les puissances*

La matrice $M \in \mathcal{M}_n(R^{+*})$ est irréductible si et seulement si, $\forall (i, j) \quad \exists k \quad m_{(i,j)}^{[k]} > 0$.

Ne pas confondre avec "primitivité" :

Théorème 2. *Caractérisation de l'irréductibilité par l'Algèbre Linéaire*

Soit la matrice non-négative $M \in \mathcal{M}_n(R^{+*})$ et pour chaque ligne M_i le réel $r_i = \sum_{k\in[1,..,n]} m_{ik}$; si on pose D la matrice diagonale de diagonale $(r_1, r_2, ..r_n)$ et B=M-D ; M est irréductible si et seulement si le rang de B est égal à n-1 et le noyau de ${}^tB$ contient un vecteur à coordonnées non nulles.

Théorème 3. *Caractérisation de l'irréductibilité par le Graphe*
La matrice non-négative $M \in \mathcal{M}_n(R^{+*})$ *est irréductible si et seulement si le graphe direct associé est fortement connexe.*

comment réduire effectivement ?

2 Définitions

CASE (i, j),
TABLEAU $U = [1, .., n]^2$
élément $m_{(i,j)}$
matrice $M = (m_{(i,j)}) \in \mathcal{M}_n(R^{+*})$
$m_{(i,j)}^{[t]}$
zéro de M= une case du tableau qui affiche une valeur nulle.
La jème colonne d'une matrice M sera désignée par $M^{(j)}$
la ième ligne sera désignée par $M_{(i)}$
La jème puissance de M sera désignée par M^j
$M_{(I,J)}$=Matrice extraite
$U_{(I,J)}$=Tableau extrait

3 Etude des termes non nuls des puissances d'une matrice non négative

Schwarcz On Powers of Non-Negative Matrices

New kinds of theorems on non-negative matrices

4 Point de vue "topologique" : Les supports de zéros

Lemme 1. *Soient* $(x, y) \in (R^{+*}) \times (R^{+*}), x \times y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0.$

Lemme 2. *Soient* $(x, y) \in (R^{+*}) \times (R^{+*}), x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0.$

Définition 2. *Support des zéros d'une matrice Non Negative*

Support de $M^t = \left\{ (i, j), m^{[t]}_{(i,j)} = 0 \right\}$

Définition 3. *Distance entre points de* $[1, .., n]^2$*, distance de Hausdorff de deux parties de* $[1, .., n]^2$ *associée à cette distance*

Soient $(x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2))$ *on désignera leur distance par* $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Soient deux parties A *et* B *de* $[[1, .., n]]^2$*, on appellera distance de Hausdorff de* A *et* B *la borne inférieure de* $\{\epsilon, \forall a \in A, \exists b \in B, d(a, b) < \epsilon\}$ *et de* $\{\epsilon, \forall b \in B, \exists a \in A, d(a, b) < \epsilon\}$

Proposition 1. *Une suite* $(Z_t, t \in \mathbb{N})$ *de parties de* U *converge au sens de Hausdorff si et seulement si il existe* t_0*, tel que* $\forall t \geq t_0, Z_t = Z_{t_0}$.

LES ZEROS NE SE VALENT PAS Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^{+*})$ et $(i,j) \in [1,..,n]^2$
zéro de M $m_{(i,j)} = 0$
zéro persistant de M $\forall k \in \mathbb{N}^*, m^{[k]}_{(i,j)} = 0$
zéro périssable de M $\exists t_0 \in \mathbb{N}^*, \forall t > t_0, m^{[k]}_{(i,j)} \neq 0$
zéro périodique

Lemme 3. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^{+*})$, à diagonale positive, $m^{[t]}_{(u,v)} > 0 \Rightarrow m^{[t+1]}_{(u,v)} > 0$.*

Démonstration. $m^{[t+1]}_{(u,v)} = m^{[t]}_{(u,v)} m_{(v,v)} + \sum_{k \neq v} m^{[t]}_{(u,k)} m_{(k,v)}$, chacun des termes du membre de droite est non-négatif, sauf $m_{(v,v)}$ et $m^{[t]}_{(u,v)}$ qui sont positifs.

Donc dans le cas d'une matrice à diagonale positive il ne peut apparaître de zéro, mais ils peuvent disparaître.

□

Diagonale positive et zéros périodiques ? ? ? ?

Théorème 4. *Le cas des matrices à diagonale positive*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^{+*})$, à diagonale positive, la suite $(Z(M^t), t \in \mathbb{N}^*)$ est décroissante et il existe t_0 tel que $\forall t \geq t_0, Z(M^t) = Z(M^{t_0})$.

Démonstration. $m^{[t+1]}_{(i,j)} = \sum_k m^{[t]}_{(i,k)} m_{(k,j)}$.

$\sum_k m^{[t]}_{(i,k)} m_{(k,j)} = 0 \Rightarrow \forall k \quad m^{[t]}_{(i,k)} m_{(k,j)} = 0$.

Supposons $m^{[t+1]}_{(i,j)} = 0$ alors $m^{[t]}_{[i,j]} m_{(j,j)}$ est nul, or $m_{(j,j)} \neq 0$ d'où $m^{[t]}_{(i,j)} = 0$

Donc $(i,j) \in Z(M^{t+1}) \Rightarrow (i,j) \in Z(M^t)$, d'où la suite $(Z(M^t), t \in \mathbb{N}^*)$ est décroissante . Comme c'est une suite à valeurs dans un ensemble fini, elle est alors convergente. $\exists t_0, \forall t \geq t_0, Z(M^t) = Z(M^{t_0})$. □

Théorème 5. *Le cas des matrices à diagonale non positive*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^{+*})$, dont la diagonale n'est pas nécessairement positive, la suite $(Z(M^t, t \in \mathbb{N}^*)$ est, soit convergente, soit ultimement périodique.

Démonstration. $\exists t_0 < t_1, Z(M^{t_0}) = Z(M^{t_1})$. Nous prendrons le plus petit couple (t_0, t_1) et montrerons que $Z(M^{t_0+1}) \subset Z(M^{t_1+1})$.

$(i,j) \in Z(M^{t_0+1}) \Leftrightarrow m_{(i,j)}^{[t_0+1]} = 0.$, d'où $\sum_k m_{(i,k)}^{[t_0]} m_{(k,j)} = 0$, c'est à dire $\forall k \in [1,..,n], m_{(i,k)}^{[t_0]} = 0 \vee m_{(k,j)} = 0$.

L'hypothèse $Z(M^{t_0}) = Z(M^{t_1})$ entraîne que, quel que soit $k, m_{(i,k)}^{[t_0]} = 0 \iff m_{(i,k)}^{[t_1]} = 0$, d'où $\sum_k (m_{(i,k)}^{[t_1]}) m_{(k,j)}) = 0$; c'est à dire $m_{(i,j)}^{[t_1+1]} = 0.$, ce qui établit l'inclusion $Z(M^{t_0+1}) \subset Z(M^{t_1+1})$. l'inclusion réciproque se démontre de la même manière. D'où il découle, par une récurrence immédiate que la suite $(Z(M^t, t \geq t_0)$ est périodique de période $t_1 - t_0$.

Bien entendu si $t_1 = t_0 + 1$ la suite "périodique de période 1" est tout simplement constante à partir de t_0. $\square$

Nous avons prouvé l'existence possible de zéros périodiques.

5 Deux exemples de zéros périodiques

Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ On voit d'abord quatre zéros périssables qui disparaissent en deux itérations, restent six zéros, deux permanentes et deux périssables qui alternent avec deux autres périssables.

Soit $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$Q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $Q^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $Q^5 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 10 & 6 \\ 5 & 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Ici les deux premières matrices semblent suivre un règime de périodicité mais dès la quatrième les deux zéros commencent à disparaître

6 Le secret de la "longévité" des zéros persistants

Désormais nous supposerons, sauf indication contraire, que la diagonale des matrices considérées est positive.

Soit $m^{[2]}_{(i_1,j_1)} = 0$ (par suite $m_{(i_1,j_1)} = 0$).

Alors $\sum_{k\in[1,..,n]} m_{(i_1,k))} m_{(k,j_1)} = 0(*)$.

On pose $I_1 = \left\{k \in [1,..,n], m_{(k,j_1)} = 0\right\}$

$I_2 = \left\{k \in [1,..,n], m_{(k,j_1)} > 0\right\}$.

(*) devient

$\sum_{k\in I_1} m_{(i_1,k)} m_{(k,j_1)} + \sum_{k\in I_2} m_{(i_1,k))} m_{(k,j_1)} = 0$.

Or $k \in I_1 \Rightarrow m_{(k,j_1)} = 0$

(*) devient à $\sum_{k\in I_2} m_{(i_1,k))} m_{(k,j_1)}$=0 et, comme $m_{(k,j_1)} > 0$

(*)$\Leftrightarrow \forall k \in I_2, m_{(i_1,k)} = 0$.

Sur la ligne de (i_1, j_1) les (i_1, k) où $k \in I_2$ et sur la colonne de (i_1, j_1) les (k, j_1) où $k \in I_1$.

De même si on considère i_2 tel que $m^{[2]}_{(i_2,j1)} = 0$ et $j_2 \in I_2$ alors $m_{(i_2,j_2)} = m_{(i_1,j_2)} = 0$... d'où
Pour $m^{[2]}(i_2, j_1)$ il faut des zéros en (i_2, k) où $k \in I_2$ et en (k, j_1) où $k \in I_1$

Et ainsi de suite pour chaque colonne

En répétant ce raisonnement pour chacune des cases considérées on établit que les zéros nécessaires et suffisants pour que la configuration considérée persiste àl'instant 2 forment un quadrillage (avec des "trous") au sein du tableau ; le côté vertical comptant $|I_1|$ éléments , le côté horizontal en comptant $|I_2|$

les indices des lignes et des colonnes de ce quadrillage forment une partition de [1,..,n].

D'où les définitions

Définition 4. *Soit une matrice* $M = (m_{(i,j)}) \in \mathcal{M}_n(R^{+*})$ *et deux sous-ensembles I et J de* $[1, .., n]$ *on désignera par* $M_{I,J}$ *la matrice extraite, dans laquelle les lignes d'indice n'appartenant pas à I ont été supprimées, de même que les colonnes d'indice n'appartenant pas à J.*

Définition 5. *Stratification de zéros*

Une matrice $M = (m_{(i,j)}) \in \mathcal{M}_n(R^{+*})$ *à diagonale positive étant donnée, on dira que la matrice extraite* $M_{I,J}$ *est une stratification de zéros lorsque I et J forment une partition de* $[1, .., n]$ *et* $M_{(I,J)} = 0$.

Remarque: 1. */ L'objectif de cette étude devant* *concerner des dispositions de zéros dans des cases d'un tableau $n \times n$, on comprendra que la positivité de la diagonale entraîne que si $M_{I,J}$ est une stratification de zéros aucune case de la diagonale ne pourra appartenir à la matrice $M_{I,J}$ qui est censée être nulle.*

Le même raisonnement qui nous a assuré que, dans le cas de diagonale positive il n'y a pas création de zéros, établit que la diagonale de $M^{[t]}$ est aussi positive.

Ci-dessous un exemple : les 0 représentent des zéros, les x représentent des valeurs quelconques non-négatives. La matrice $M_{((1,3,4,7),(2,5,6,8))}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	m_{11}	0	x	x	0	0	x	0
2	x	m_{22}	x	x	x	x	x	x
3	x	0	m_{33}	x	0	0	x	0
4	x	0	x	m_{44}	0	0	x	0
5	x	x	x	x	m_{55}	x	x	x
6	x	x	x	x	x	m_{66}	x	x
7	x	0	x	x	0	0	m_{77}	0
8	x	x	x	x	x	x	x	m_{88}

Ci-dessous un exemple : les 0 représentent des zéros, les x représentent des valeurs quelconques non-négatives. La matrice $M_{((1,3,4,7),(2,5,6,8))}$ est une stratification de zéros, elle est formée de trois alignements horizontaux composés chacun de trois rectangles de même largeur (une case), mais de longueurs variables (une case, deux cases, une case) :

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	m_{11}	0	x	x	0	0	x	0
2	x	m_{22}	x	x	x	x	x	x
3	x	0	m_{33}	x	0	0	x	0
4	x	0	x	m_{44}	0	0	x	0
5	x	x	x	x	m_{55}	x	x	x
6	x	x	x	x	x	m_{66}	x	x
7	x	0	x	x	0	0	m_{77}	0
8	x	x	x	x	x	x	x	m_{88}

Théorème 6. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^{+*})$ et $M_{(I,J)}$ une stratification de zéros alors i) $M^{[2]}_{(I,J)}$ est une stratification de zéros de $M^{[2]}$. ii) les zéros des cases de la stratification $M_{(I,J)}$ sont persistants.*

Démonstration. pour calculer la matrice extraite $M^2_{(I,J)}$ il suffit de considérer M comme une matrice par blocs relativement à un découpage de l'intervalle [1,..,n] en intervalles déterminés par I_1 ou par I_2, ce qui fait apparaître dans chaque ligne de blocs et dans chaque colonne de blocs une alternance de blocs nuls et de blocs quelconques ; ce qui se traduit dans $M^{(2)}$ par la même alternance. Une fois démontré le résultat pour $M^{[2]}$, on comprend qu'il sera vrai pour toute puissance de 2, et par application du lemme 3 il sera vrai pour toute puissance de M. Une récurrence immédiate établira que $M^{[t]}_{(I,J)} = 0$ pour tout t. □

Remarque: 2. *Le tableau suivant représente la matrice $M \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R}^{+*})$, où $i = 1, j = 2$ $I = \{1, 3, 4, 7\}$ $et J = \{2, 5, 6\}$*

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1	*x*	*0*	*x*	*x*	*0*	*0*	*x*
2	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
3	*x*	*0*	*x*	*x*	*0*	*0*	*x*
4	*x*	*0*	*x*	*x*	*0*	*0*	*x*
5	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
6	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
7	*x*	*0*	*x*	*x*	*0*	*0*	*x*

les 0 représentent des zéros, les x représentent des valeurs structement positives ; on voit aisément, comme les 0 se trouvent dans des cases du produit cartésien $I \times J$*, lors de la détermination de la valeur d'une case de* $M_{I,J}$ *dans* M^2 *on additionne des produits de la forme* $0 \times x$*, c'est à dire 0.*

LARGE

Théorème 7. *Tout zéro persistant appartient à une stratification de zéros*

Démonstration. Nous allons définir et travailler avec des matrices dont les termes seront dans $B = \{0, 1, indif\}$. Nous appellerons produit d'un vecteur $A = (a_1, .., a_n)$ à coefficients dans B le vecteur $C = (c_1, .., c_n)$ défini comme suit lorsque

$a_k \neq indif : a_k = 1 \Rightarrow b_k = 0, a_k = 0 \Rightarrow b_k = indif$ Remarquant que $m^{[2]}_{(i,j)} = 0 \Leftrightarrow A \times C = (0, .., 0)$.

Détermination des stratifications de zéros Il est clair que la matrice M peut comporter des zéros hors-stratification de zéros (les zéros périssables, par exemple), et on peut désirer déterminer les stratifications de zéros.

Proposition 2. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^{+*})$, M contient une stratification de zéros si et seulement si il existe $j \in [1, .., n]$, avec $I_1 = \left\{ i \in [1, .., n], m_{(i,j)} = 0 \right\}$ et $I_2 = \left\{ i \in [1, .., n], m_{(i,j)} > 0 \right\}$ pour lesquels la matrice M_{I_1,I_2} est nulle.*

Démonstration. immédiat. □

Remarque: 3. *Dans le cas d'une matrice M non-négative mais à diagonale non-positive le Théorème précédent n'est, bien entendu, plus valable ; nous considérerons alors la matrice $N = Id + M$ qui sera à la fois non-négative et à diagonale positive, ce qui permettra d'appliquer les résultats et les techniques relatives à ce type de matrices.*

7 Un exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Elle est non-négative mais sa diagonale n'est pas positive.

Considérons la matrice $C = Id + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Le bloc Nord-Est est une stratification de zéros donc ces neufs zéros sont persistants (dans C). Les deux zéros des deux dernières lignes sont périssables (comparaison,...). les deux zéros du bloc Nord-Ouest alternent avec deux autres, la comparaison peut aider.

On voit que la suite des Supports de zéros associés à la matrice A est périodique à partir de $t = 2$, la cause en est la présence des deux zéros périodiques.

Si on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, celle-ci est non négative et à diagonale positive ; le calcul de B^2 fait déjà disparaître les zéros périssables des cases ouest-Sud-Ouest. Les autres sont persistants, les zéros des 3 premières lignes sont persistants, ils appartiennent à l'une ou l'autre de deux stratifications. Au passage on remarquera que les stratifications concernées ne sont pas disjointes.

l'ensemble des indices des lignes contenant des 0 et J l'ensemble des indices des colonnes contenant des 0, le choix de la conjugaison assure que $|I|+|J| = n$, I et J complémentaires et $M_{I,J} = 0$. Pour montrer que (i, j) est un zéro persistant on regarde $M^2_{I,J}$ et récurrence.

Remarque: 4. *Le tableau suivant représente la matrice $M \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R}^{+*})$, où $i = 1, j = 2$ $I = \{1, 3, 4, 7\}$ et $J = \{2, 5, 6\}$*

	1	2	3	4	5	6	7
1	x	0	x	x	0	0	x
2	x	x	x	x	x	x	x
3	x	0	x	x	0	0	x
4	x	0	x	x	0	0	x
5	x	x	x	x	x	x	x
6	x	x	x	x	x	x	x
7	x	0	x	x	0	0	x

votre Mission : regrouper les 0 le long de la pointe sud-ouest au moyen de transpositions et par conjugaison suivant des transpositions

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	x	0	x	x	0	0	x	0
2	x	x	x	x	x	x	x	x
3	x	0	x	x	0	0	x	0
4	x	0	x	x	0	0	x	0
5	x	x	x	x	x	x	x	x
6	x	x	x	x	x	x	x	x
7	x	0	x	x	0	0	x	0
8	x	x	x	x	x	x	x	x

On peut regrouper les 0 le long de la bordure ouest en échangeant les colonnes 8 et 1, puis 6 et 3, puis 5 et 4 par multiplication à droite de M par P ; alors en multipliant M à sa gauche par la transposée de P on échange les lignes 8 et 1, puis 7 et 3, puis 5 et 4 ce qui regroupe les 0 le long de la bordure sud. Au total on a regroupé les 0 auprès du coin sud-ouest.

Théorème 8. *Soit une matrice* $M \in \mathcal{M}_n(R^{*+})$ *qui contient un système complet de zéros F, il existe une permutation P telle que* ${}^tPMP$ *est de la forme* $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$. *P est définie directement par la connaissance de F.*

Démonstration. Soient $M \in \mathcal{M}_n(R^{+*})$et $M_{I,J}$ une matrice extraite de M, où les deux ensembles d'indices I et J sont complémentaires.

Une partie de [1,..,n] sera appelée "segment initial" si son minimum est égal à 1 et si elle est connexe dans $[1, .., n]$, elle sera appelée "segment final" si son maximum est égal à n et si elle est connexe dans $[1, .., n]$.

Tant que I n'est pas un segment final (et J n'est pas un segment initial) effectuons sur les colonnes de M la transposition $P = (min(I), max(\complement_{[1,..,n]}I)$ qui se traduit par $I : I - min(I) + max(J)$ $J : J - max(J) + min(I)$.

Comme le minimum de I croit strictement (et celui de J décroit strictement) la procédure s'arrête ; à ce moment I est un segment final, J est un segment initial, les zéros sont regroupés en un bloc sud-ouest. De plus nous avons aussi obtenu P comme composée de transpositions.

$\square$

Proposition 3. *Soit une matrice réductible* $M \in \mathcal{M}_n(R^{*+})$*, de la forme* $M = P\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} {}^tP$ *où* $(B, D) \in \mathcal{M}_p(R^{*+}) \times \mathcal{M}_{n-p}(R^{*+})$ *et* $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(R^{*+})$*, contient une stratification de zéros* M_{I_1,I_2} *.*

Démonstration. Si on désigne par $E = (e_1, .., e_n)$ la base canonique de R^n et par P la matrice de passage de $U = (u_1, .., u_n)$ à E, la matrice $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ représente, relativement à la base U, un endomorphisme f tel que $f(< u_1, u_2, .., u_p >) \subset < u_1, .., u_p >$; si on désigne par $(e_{v_1}, e_(v_2), .., e_(v_p))$ les vecteurs $(u_1, .., u_p)$ et par $(e_{w_1}, .., e_{w_{n-p}})$ les vecteurs $(u_1, .., u_{n-p})$ la matrice M contient la matrice extraite $M_{([v_1,v_2,.,v_{n-p}]}[w_1, .., w_p])$. Les ensembles d'indices sont complémentaires dans $[1, .., n]$, le bloc Sud-Ouest nul indique la nullité de la matrice extraite considérée, ce qui établit bien que M contient une stratification de zéros. D'où le

Théorème 9. *Une matrice* $M \in \mathcal{M}_n(R^{*+})$ *est réductible si et seulement si elle contient une stratification de zéros.*

9 L'algorithme

Ce qui dicte l'algorithme proposé : Pour chaque colonne de M on "fabrique" I_1 et I_2, on détermine si $M_{(I_1,I_2)} = 0$. Si oui M contient une stratification de zéros et on la connait, on pourra donc sans difficultés déterminer la matrice P de la définition de la réductibilité. Si j ne convient pas on change de colonne et si aucun j ne convient il n'y a pas de système complet de zéros, ce qui signifie que M est irréductible.

D'où l'algorithme :

fini :=faux j :=1

Tant que $j \leq n$ et fin=faux déterminer dans la j-ième colonne de M les ensembles $I_1 = \left\{y \in [1, .., n], m_{(y,j)} = 0\right\}$ et $I_2 = \left\{y \in [1, .., n], m_{(y,j)} > 0\right\}$ si $M_{I_1,I_2} = 0$ fini :=vrai sinon $j := j + 1$ fin.

La complexité, en termes de nombre d'opérations est moins bonne que les algorithmes de recherche de composantes fortement connexes mais la méthode proposée a l'avantage de fournir, dans le cas de réductibilité, de manière immédiate la matrice P qui intervient dans la formule de la réducibilité (voir 3).

10 Le cas où la diagonale n'est pas positive

Dans le cas où la diagonale de M n'est pas positive posons $N = M + Id$, qui sera à la fois non-négative et à diagonale positive.

Proposition 4. *Soient M une matrice non-négative et à diagonale non-positive et N=Id+M , M est réductible si et seulement N l'est.*

Démonstration. Soit P une matrice de permutation $M = P \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} {}^t P \Leftrightarrow N = Id + \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} {}^t P \Leftarrow$
$N = P \begin{pmatrix} Id + B & C \\ 0 & Id + D \end{pmatrix} {}^t P$ (parce que B et D sont carrées).

Par suite la réductibilité de M est équivalente à celle de N, à laquelle on pourra appliquer ce qui concerne les matrices non-négatives à diagonale positive. □

11 références

[1], A.Berman, R.J. Plemons, Non Negative Matrices in the Mathematical Sciences, SIAM's Classics in Applied Mathematics, Philadelphia 1994.

[2] S. Schwarz, On powers of non negative matrices, Eudmil, 1965