

Une démonstration effective du Théorème de Frobenius sur les matrices non-négatives ou

Comment réduire à la main les matrices non-négatives

Patrick Teller

22 octobre 2025

Résumé

Il y a deux manières d'étudier les matrices non-négatives "générales" : les associer à des Graphes ([1,2]) ou leur appliquer l'outillage de l'Algèbre Linéaire ([4]), voire combiner ces deux points de vue. Le travail qui suit a pris une autre direction : étudier exclusivement le comportement des termes nuls (les "zéros") dans la suite des puissances successives d'une matrice M non-négative, en ayant à l'esprit qu'il s'agit d'un système dynamique à valeurs dans l'ensemble des matrices de taille n , en s'appuyant sur son caractère Markovien (sans mémoire) ; ce point de vue est le symétrique de l'étude des termes non nuls ([6]), qui a été menée au moyen des outils de la théorie des demi-groupes.

Dans le cas où la diagonale de la matrice M est positive les zéros seront de deux types : périssables (destinés à disparaître, comme leur nom le suggère) et persistants (nuls pour toute puissance de M).

Nous montrerons que les zéros persistants sont les obstacles à l'irréductibilité et que, dans le cas primitif, c'est la "durée de vie" des zéros périssables qui détermine l'exposant de primitivité. Dans le cas où la diagonale de M n'est pas positive (c'est à dire lorsque certains termes de la diagonale sont nuls) apparaîtra la question d'une périodicité éventuelle.

Le paragraphe 2 introduit la notion de support pour étudier les ensembles de zéros parmi les cases de la matrice. Si M est non-négative et à diagonale positive, la suite des supports $Z(M^t)$ est décroissante et ultimement stationnaire. Dans le cas où M est non-négative et à diagonale positive le degré du polynôme minimal majore le rang de la disparition des zéros périssables (à comparer avec l'exposant dans le cas primitif)[]]. Le paragraphe 3 introduit la notion de Schmilblick, sous-matrice nulle de taille $p \times (n - p)$ et établit que les configurations de zéros persistants sont les Schmilblicks.

Le paragraphe 4 montre un exemple de recherche de Schmilblick dans une matrice non-négative.

Le paragraphe 5 établit l'équivalence entre le caractère réductible d'une matrice non-négative et la présence de Schmilblick avec une démonstration

effective et élémentaire du Théorème de Frobenius sur la forme normale des matrices non-négatives réductibles. Les sous-matrices, que nous appelons Schmilblick lorsqu'elles sont nulles, apparaissent autant dans [4] que [3] mais leur lien avec la réductibilité ainsi que la facilité de leur manie- ment ne semblent pas avoir été remarquées. Un algorithme "réduction à la main d'une matrice non-négative" est présenté.

1 Définitions et conventions de base

Comme nous sommes essentiellement intéressés par les zéros des matrices étudiées, nous nous limiterons à des matrices à coefficients dans $0,1$ avec les règles de calcul que l'on devine : $1 + 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1, 0 + 0 = 0, 0 * 0 = 0 * 1 = 0, 1 * 1 = 1$. ([4]).

Si M désigne une matrice non-négative on désignera par $m_{(i,j)}$ la valeur affichée en (i, j) et par $m_{(i,j)}^{[t]}$ la valeur affichée dans la même case de la matrice M^t ; nous dirons aussi que la case (i, j) est dans l'état $m_{(i,j)}^{[t]}$ à l'instant t .

La j ème colonne d'une matrice M sera désignée par $M^{(j)}$, à ne pas confondre avec M^j qui représente la puissance j de la matrice, tandis que la i ème ligne sera désignée par $M_{(i)}$.

??? Dans un premier temps nous considérerons des matrices non-négatives à diagonale positive.

2 Un regard topologique

Définition 1. *Support des zéros d'une matrice*

Soit une matrice M à n lignes et colonnes on appelle support des zéros de M , que l'on notera $Z(M)$, l'ensemble des cases $(i, j) \in [1, \dots, n]^2$ qui sont dans l'état zéro.

Définition 2. *Distance entre points de $[1, \dots, n]^2$, distance de Hausdorff de deux parties de $[1, \dots, n]^2$ associée à cette distance*

Soient $(x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2))$ on désignera leur distance par $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Soient deux parties A et B de $[1, \dots, n]^2$, on appellera distance de Hausdorff de A et B la borne inférieure de $\{\epsilon, \forall a \in A, \exists b \in B, d(a, b) < \epsilon\}$ et de $\{\epsilon, \forall b \in B, \exists a \in A, d(a, b) < \epsilon\}$ (nous admettrons qu'il s'agit d'une distance sur l'ensemble des parties du tableau $[1, \dots, n]^2$. [6])

Proposition 1. *Une suite $(Z_t, t \in \mathbb{N}^*)$ de parties de $[1, \dots, n]^2$ converge au sens de Hausdorff si et seulement si il existe t_0 , tel que $\forall t \geq t_0, Z_t = Z_{t_0}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que dans notre cas la distance de Hausdorff est nécessairement un entier non négatif. $\square$

Définition 3. *Soient M une matrice non négative et la case $(i, j) \in [1, \dots, n]^2$, dans l'état zéro pour t , on dira qu'il s'agit d'un zéro persistant lorsque $\forall k \in \mathbb{N}^*, m_{(i,j)}^{[t+k]} = 0$.*

$\mathbb{N}^*, m_{(i,j)}^{[k]} = 0$, ce sera un zéro périssable lorsque $\exists t_0 \in \mathbb{N}^*, \forall t > t_0, m_{(i,j)}^{[k]} \neq 0$, on dira que ce zéro est périodique lorsque la case affiche de manière périodique la valeur zéro.

Nous verrons que les zéros d'une matrice non négative relèvent nécessairement de l'une de ces catégories.

Lemme 1. Soit M une matrice non négative à diagonale positive $m_{(u,v)}^{[t]} > 0 \Rightarrow m_{(u,v)}^{[t+1]} > 0$.

Démonstration. Par définition, $m_{(u,v)}^{[t+1]} = m_{(u,v)}^{[t]} m_{(v,v)} + \sum_{k \neq v} m_{(u,k)}^{[t]} m_{(k,v)}$, or chacun des termes du membre de droite est non négatif, sauf $m_{(v,v)}$ et $m_{(u,v)}^{[t]}$ qui sont positifs.

Donc dans le cas d'une matrice non-négative à diagonale positive il ne peut apparaître de zéros, mais ils peuvent disparaître ; ce qui n'est pas le cas lorsque certains termes diagonaux seront nuls.. $\square$

Théorème 1. Lorsque la diagonale est positive la suite des supports de zéros est décroissante

Soit M une matrice non-négative à diagonale positive la suite $(Z(M^t), t \in \mathbb{N}^*)$ est décroissante et il existe t_0 tel que $\forall t \geq t_0, Z(M^t) = Z(M^{t_0})$.

Démonstration. Avant tout $\forall t \in \mathbb{N}^{+*}, m_{(i,j)}^{[t+1]} = \sum_{k \in [1, \dots, n]} m_{(i,k)}^{[t]} m_{(k,j)}$, cette somme de termes non négatifs ne peut être nulle que si et seulement si chacun des termes est nul. Or nous avons supposé que la diagonale est positive donc $m_{(j,j)}$ n'est pas nul, par suite, si $m_{(i,j)}^{[t+1]}$ est nul, alors $m_{(i,j)}^{[t]} m_{(j,j)}$ est nul, d'où $m_{(i,j)}^{[t]} = 0$ ce qui signifie que si (i, j) appartient à $(Z(M^{[t+1]}))$ alors (i, j) appartient aussi à $(Z(M^t))$, d'où la suite $(Z(M^t), t \in \mathbb{N}^*)$ est décroissante au sens de l'inclusion. Comme c'est une suite à valeurs dans un ensemble fini, elle est alors convergente.

Enfin nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'une suite convergente pour la distance de Hausdorff dans l'ensemble des parties de $[1, \dots, n]^2$ est constante à partir d'un certain rang. $\square$

Il est possible de décrire plus précisément le phénomène de la disparition des zéros périssables ; le caractère Markovien de la suite des supports $Z(M^t)$ entraîne les deux propositions suivantes :

Proposition 2. S'il existe un entier s tel que $Z(M^s) = Z(M^{s+1})$ alors, quel que soit $t \geq s, Z(M^t) = Z(M^s)$.

Ce qui signifie que si M possède r zéros périssables M^r n'en possède plus.
On montrerait de même que

Proposition 3. S'il existe un entier s non-négatif et un rang t tels que $Z(M^s) = Z(M^{t+s})$ alors $Z(M^{s+1}) = Z(M^{t+s+1})$, ce qui signifie, par récurrence, que la suite des supports de zéros est périodique à partir du rang $Z(M^t)$.

Théorème 2. *La disparition des zéros périssables dans le cas à diagonale positive*

Soit M , non-négative, à diagonale positive et m le degré du polynôme minimal de M alors la suite $(Z(M^s), s \geq m-1)$ est constante et l'ensemble des zéros de M^{m-1} est identique à celui des zéros persistants de M .

Démonstration. La suite $(Z(M^i))$ est décroissante donc $Z(M^m) \subset Z(M^{m-1}) = \bigcap_{i=1}^{m-1} Z(M_i)$ et d'autre part $M^m = \sum a_i M^i$, où $X^m - \sum a_i X^i$ est le polynôme minimal de M d'où $Z(M^m) = Z(M^{m-1})$. Alors quel que soit (i, k) $m_{(i,k)}^{[m-1]} = 0 \iff m_{(i,k)}^{[m]} = 0$. Par suite pour tout couple (i, j) $\sum_k m_{(i,k)}^{[m-1]} m_{(k,j)} = 0 \iff \sum_k (m_{(i,k)}^{[m]} m_{(k,j)}) = 0$. D'où $m_{(i,k)}^{[m-1]} = 0 \iff m_{(i,k)}^{[m]} = 0$, c'est à dire $Z(M^m) = Z(M^{m+1})$.

D'où il découle, par une récurrence immédiate que la suite $(Z(M^s), s \geq m-1)$ est constante; par suite les zéros périssables auront nécessairement disparu au plus tard dans (M^{m-1}) . Et à partir de cette puissance de M les seuls zéros seront persistants et seront ceux de M . $\square$

Remarquons que nous avons utilisé la positivité de la diagonale positive; on comparera avec des résultats de [1] sur l'exposant d'une matrice primitive

3 A la recherche des zéros persistants

Soit une matrice non-négative M Il est clair qu'un zéro en soi n'est ni persistant ni périssable, ce qui crée des zéros persistants relève de configurations de cases affichant l'état zéro; nous recherchons donc des configurations de zéros persistants.

Définition 4. *Soit (i, j) un zéro de M on dira que c'est un zéro d'ordre supérieur ou égal à 2 lorsque $m_{(i,j)} = m_{(i,j)}^{[2]} = 0$. On posera $I_1 = \{k \in [1, \dots, n], m_{(k,j)} = 0\}$ et $I_2 = \{k \in [1, \dots, n], m_{(k,j)} = 1\}$. I_1 représente les indices des cases de la colonne $M^{(j)}$ qui sont dans l'état zéro à l'instant $t = 1$ et I_2 représente les indices des cases de la ligne $M_{(i)}$ à l'état zéro pour $t = 1$; on désignera le couple (I_1, I_2) sous le nom de partition canonique associée à l'élément $m_{i,j}$.*

Définition 5. *Soit M une matrice à n lignes et colonnes, I et J des sous-ensembles de $\llbracket 1, \dots, n \rrbracket$ on désignera par $M_{(I,J)}$ la matrice obtenue en supprimant dans M les lignes dont l'indice n'appartient pas à I et les colonnes dont l'indice n'appartient pas à J .*

$M_{(I,J)}$ sera appelée *Schmilblick* lorsque (I, J) est une partition de $[1, \dots, n]$ en deux parties non vides.

Proposition 4. *Tout Schmilblick nul est une configuration de zéros persistants.*

Démonstration. Soit un Schmilblick $M_{(I,J)}$ de M , supposons que $M_{(I,J)} = (0)$, posons $M = (m_{(u,v)})$ où $m_{(u,v)} = 0$ lorsque $u \in I \wedge v \in J$.

L'état de la case (u, v) de $M_{(I,J)}$ en $t = 2$ est égal à $\sum_{k \in [1, \dots, n]} m_{(u,k)} m_{(k,v)}$, qui se décompose en $\sum_{k \in I} m_{(u,k)} m_{(k,v)} + \sum_{k \in J} m_{(u,k)} m_{(k,v)}$. Si $k \in I$, $m_{(k,v)} = 0$ donc $\sum_{k \in I_1} m_{(u,k)} m_{(k,v)} = 0$ et, de même, si $k \in I$, $m_{(u,k)} = 0$ et il en découle que $\sum_{k \in J} m_{(u,k)} m_{(k,v)} = 0$. D'où $M_{(I,J)} = 0$ entraîne que $M_{(I,J)}^{(2)} = 0$ et une récurrence immédiate établira que la nullité de $M_{(I,J)} = 0$ entraîne que $\forall t, M_{(I,J)}^t = 0$.

Par suite les cases d'un Schmilblick sont des configurations de zéros persistants. $\square$

Considérons une matrice non-négative M dont les zéros sont persistants, c'est-à-dire qui ne contient aucun zéro périssable (le Théorème 2 permet, tout en éliminant les zéros périssables, de conserver intact l'ensemble des zéros persistants).

Soit une case (i, j) qui affiche un zéro persistant, elle est en particulier en l'état zéro pour $t = 1$ et $t = 2$, alors $m_{(i,j)}^{[2]} = m_{(i,i)} m_{(i,j)} + m_{(i,j)} m_{(j,j)} + \sum_{(k \neq i \wedge k \neq j)} m_{(i,k)} m_{(k,j)}$; d'où la somme $\sum_{(k \neq i \wedge k \neq j)} m_{(i,k)} m_{(k,j)}$ est nulle.

Considérons la partition canonique (I_1, I_2) associée à $m_{i,j}$, où, comme $m_{i,j} = 0$, i appartient à I_1 et, comme la diagonale de M est positive, j appartient à I_2 ; la somme $\sum_{k \in [1, \dots, n]} m_{(i,k)} m_{(k,j)}$ se décompose en $\sum_{k \in I_1} m_{(i,k)} m_{(k,j)} + \sum_{k \in I_2} m_{(i,k)} m_{(k,j)}$.

Si $k \in I_1$, $m_{(k,j)} = 0$ donc $m_{(i,j)}^{[2]} = \sum_{k \in I_2} m_{(i,k)} m_{(k,j)} = 0$ et, comme, si $k \in I_2$ $m_{(k,j)} \neq 0$ et il en découle que, $\forall k \in I_2, m_{(i,k)} = 0$. Ce qui signifie que pour tout k de I_2 $m_{(i,k)}$ est un zéro de M , nécessairement persistant. La même démarche appliquée à $m_{(i,k)}$ entraîne que $\forall (i, k) \in I_1 \times I_2, m_{(i,k)} = 0$; de plus, par construction, (I_1, I_2) constitue une partition de $[1, \dots, n]$, d'où la sous-matrice essentielle $M_{(I_1, I_2)}$ est nulle. En conséquence toute configuration de zéros (persistants) contenant la case $m_{i,j}$ contient les cases du Schmilblick $M_{(I_1, I_2)}$, associé à $m_{(i,j)}$. D'où, en tenant compte de la proposition 2,

Proposition 5. *Toute configuration de zéros persistants est une réunion de Schmilblicks nuls.*

On notera au passage qu'un Schmilblick ne peut contenir de terme de la diagonale, puisque (I, J) est une partition de $\llbracket 1, \dots, n \rrbracket$; cette remarque restant pertinente même dans le cas où la diagonale n'est pas positive.

Remarque 1. *On remarquera que la configuration n'est pas définie par le zéro de la case (i, j) mais par un ensemble de zéros (dont les abscisses constituent I_1) sur la colonne $M^{(j)}$; il aurait été aussi légitime de nous appuyer sur $\{k \in [1, \dots, n], m_{(i,k)}^{[2]} = 0\}$.*

Recenser les configurations minimales de zéros persistants d'une matrice non-négative M revient donc à recenser les Schmilblicks nuls et, pour décrire Schmilblick il faut connaître les deux sous-ensembles complémentaires I et J .

Algorithme 1. *Schéma d'un algorithme de recherche des configurations de zéros persistants : Parcourir l'ensemble des zéros de M si $m_{i,j}$ est un zéro déterminer I_1 déterminer l'ensemble complémentaire cI_1 , si le Schmilblick $M_{I_1, {}^cI_1}$ est nul, il est le support d'une configuration de zéros persistants Passer au zéro suivant.*

4 Un exemple

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$m_{2,1} : I = \{2, 3, 4, 5\}, {}^cI = \{1\}$; le Schmilblick est nul donc c'est une configuration de zéros persistants.

$m_{2,4}, I = \{4\}, {}^cI = \{1, 2, 3, 5\}$, le Schmilblick $M_{I, {}^cI} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas nul.

De même on trouvera à partir de $m_{1,3}$ un Schmilblick nul $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et à partir

de $m_{1,4}$ le Schmilblick nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La forme 0-1 de M^5 est $[M^5] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui confirme la recherche

des zéros persistants et la disparition des zéros périssables, puisque $m=5$.

5 Zéros et matrices réductibles

Rappelons la définition des matrices non-négatives réductibles.

Définition 6. *Matrices réductibles $M \in \mathcal{M}_n(R^{*+})$ est dite réductible s'il existe une matrice de permutation P telle que ${}^tPMP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $(B, D) \in \mathcal{M}_p(R^{*+}) \times \mathcal{M}_{n-p}(R^{*+})$ et $C \in \mathcal{M}_{p, n-p}(R^{*+})$. Une matrice irréductible est une matrice qui n'est pas réductible.*

Aux diverses caractérisations de la réductibilité (ou de l'irréductibilité) [1] nous ajouterons la suivante :

Théorème 3. *Une matrice non-négative M est réductible si et seulement si elle possède un Schmilblick nul $M_{I,J}$ [2]*

Démonstration. Soient M et un Schmilblick nul $M_{(I,J)}$, la position de $M_{(I,J)}$ est inscrite dans son nom ; nous allons déterminer une matrice de permutation P telle que les éléments de $M_{(I,J)}$ se retrouveront dans le bloc inférieur gauche (ou Sud-Ouest) de la matrice tPMP .

Une partie de $[1, \dots, n]$ sera appelée "segment initial" si son minimum est égal à 1 et si elle est connexe dans $[1, \dots, n]$, elle sera appelée "segment final" si son maximum est égal à n et si elle est connexe dans $[1, \dots, n]$. Rappelons que I indexe les lignes de $M_{I,J}$ et J indexe les colonnes de $M_{I,J}$. Un Schmilblick $M_{(I,J)}$ occupera le coin Sud-Ouest si et seulement si I est un segment final et J un segment initial ; Notre objectif sera donc atteint lorsque I sera devenu un segment final (et par conséquent J sera devenu un segment initial).

Nous allons produire P comme produit de transpositions. Tant que I n'est pas un segment final (et J n'est pas un segment initial) effectuons sur les colonnes de M la transposition $P = (\min(I), \max(\mathbb{C}_{[1, \dots, n]}I))$ qui se traduit par $I : I - \min(I) + \max(J)$ $J : J - \max(J) + \min(I)$.

Comme le minimum de I croît strictement (et celui de J décroît strictement) la procédure s'arrête ; à ce moment I est un segment final, J est un segment initial, les zéros du Schmilblick sont regroupés en un bloc sud-ouest.

De plus nous avons aussi obtenu P comme composée de transpositions ; cette procédure sera appelée "procédure de quarantaine".

Nous avons bien établi que tPMP est de la forme $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, M est réductible.

Par ailleurs la conjugaison par P conserve les tailles des sous-matrices, donc le bloc Sud-Ouest obtenu est de taille $p \times n - p$, par suite les matrices B et D sont carrées. Réciproquement si on considère une décomposition en blocs $N = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, où B et D sont carrées de côtés respectif $n-p$ et p , le produit par blocs montre que les zéros du bloc Sud-Ouest sont persistants, cette propriété reste vraie par conjugaison, ce qui entraîne l'existence de Schmilblicks nuls. $\square$

Théorème 4. *Le Théorème de Frobenius*

Soit M une matrice non-négative il existe une matrice de permutation P telle

que tPMP est de la forme $\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & \dots & M_{1p} \\ 0 & M_{22} & \dots & \dots & M_{2p} \\ 0 & 0 & M_{33} & \dots & M_{3p} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \dots & \dots & M_{pp} \end{pmatrix}$, où les blocs M_{ii}

sont irréductibles.

Démonstration. On reprend la procédure de quarantaine qui fournit une matrice de permutation P telle que ${}^tPMP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, si B n'est pas irréductible on lui applique la quarantaine d'où une matrice de permutation R telle que ${}^tRBR = \begin{pmatrix} B_1 & C_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$ et on remplace B en conséquence. On opère de même avec

D si celle-ci n'est pas irréductible. On continue ainsi tant qu'apparaissent des matrices réductibles. En fin de compte il existe une matrice de permutation T

telle que tTMT est de la forme
$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & \dots & M_{1p} \\ 0 & M_{22} & \dots & \dots & M_{2p} \\ 0 & 0 & M_{33} & \dots & M_{3p} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & M_{pp} \end{pmatrix},$$
 où les blocs

M_{ii} sont irréductibles. $\square$

Attention l'exemple suivant montre qu'après réduction de la matrice M on peut encore trouver au-dessus de la diagonale de blocs des zéros persistants.

Exemple : On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Soit le Schmilblick $M_{(1,2,4,7),(3,5,6,8)}$, la permutation $P_1 = (1,3) \circ (2,6) \circ (4,5)$ le transforme en $M_{(5,6,7,8),(1,2,3,4)}$ qui occupe le coin Sud-Ouest, d'où ${}^tPMP =$

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \text{ où } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D n'est pas irréductible, elle est déjà décomposée avec $D' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et s'écrit

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right). \text{ De son côté la permutation } P_2 = (1,4) \circ (2,3) \text{ transforme}$$

$$B \text{ en } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } {}^tP_2^tP_1MP_1P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les blocs diagonaux sont irréductibles à l'exception du carré $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, il est nécessaire de conjuguer la matrice ${}^tP_2^tP_1MP_1P_2$ par la transposition $(1,2)$,

on obtient
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
 C'est la forme normale de la matrice

réductible M . On remarquera que tous les zéros n'ont pas été transférés sous la diagonale de blocs et que cette diagonale est constituée de matrices irréductibles.

Remarque 2. *On peut montrer que l'ensemble des blocs diagonaux ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a opéré ; la démonstration la plus élémentaire repose sur l'interprétation combinatoire de l'irréductibilité au travers de la connexité forte du digraphe associé à la matrice non-négative : les blocs diagonaux, irréductibles, sont les matrices d'incidence des composantes fortement connexes.*

Algorithme 2. *Parcourir l'ensemble des zéros de la matrice si $m_{i,j}$ est un zéro déterminer $I_1 = \{k \in [1, \dots, n], m_{(k,j)} = 0\}$ et son complémentaire $I_2 = \{k \in [1, \dots, n], m_{(k,j)} \neq 0\}$. Si $M_{I_1 I_2}$ est nulle c'est une configuration de zéros persistants, appliquer la procédure de quarantaine qui détermine la matrice P telle que ${}^t P M P = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$.*

Exemple : Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Parcourons l'ensemble des

zéros de M , de haut en bas et de gauche à droite. $m_{3,1}$ et $m_{4,1}$ ne sont pas des zéros persistants. $m_{1,2}$ est un zéro persistant, $I = \{1, 4\}, J = \{2, 3\}$; appliquons la procédure de quarantaine : P est la matrice de la transposition $(1, 3)$,

$$P M P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer si une matrice non négative, à diagonale positive, M est réductible, il suffit de calculer M^{m-1} , ce qui purge les zéros périssables, d'où les zéros restants sont nécessairement les zéros persistants de M , s'il y en a, ce qui permet de décider du caractère réductible ou pas de M .

Pour décider si un zéro particulier est persistant on appliquera la procédure utilisée pour $m_{i,j}$ dans le Théorème 3.

Pour déterminer les configurations de zéros persistants on appliquera dans son intégralité la procédure du Théorème 3.

6 Les différents types de zéros dans le cas non-négatif à diagonale non positive

Rappelons que dans le cas d'une matrice non négative dont la diagonale contient des zéros la suite des supports de zéros peut ne pas être monotone.

Théorème 5. *Soit M une matrice non-négative dont la diagonale n'est pas positive, les zéros de la suite des matrices $(Z(M^t))$ sont périssables, persistants ou ultimement périodiques; si, de plus, M est irréductible, les zéros concernés seront périssables et/ou ultimement périodiques.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que la suite $(Z(M^t)) = (Z[M]^t)$ est à valeurs dans un ensemble fini et possède un caractère markovien, ce qui permet d'appliquer la proposition 3.

Ce qui établit que les zéros de la suite $(Z(M^t))$ sont périssables ou ultimement périodiques.

Bien entendu si $t_1 = t_0 + 1$ la suite "ultimement périodique de période 1" est tout simplement constante à partir de t_0 . $\square$

$$\begin{aligned} \text{Exemple : } M &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ M^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} M^5 = M^4 \text{ donc la suite est stationnaire, à partir du rang 4.} \end{aligned}$$

7 Irréductibilité, Primitivité

Rappelons la

Définition 7. *Une matrice non négative M est dite primitive lorsqu'il existe un entier m tel que $M^m > 0$ et le plus petit m pour lequel cette inégalité est vraie est appelé exposant de M .*

A la lumière du Théorème 4 on comprend le

Théorème 6. *Une matrice non-négative M est primitive si et seulement si ses zéros sont périssables (l'absence de zéros persistants se traduit par l'irréductibilité).*

On peut aussi énoncer

Théorème 7. *Une matrice non négative et irréductible qui possède au moins un 1 sur la diagonale principale est primitive.*

démontré dans le contexte des graphes [3]
On en déduira le

Théorème 8. *Une matrice non-négative et irréductible qui possède des zéros périodiques a forcément une diagonale nulle mais la réciproque n'est pas vraie*

comme le montre l'exemple suivant. $M : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$

$Z(M^5) = \emptyset$.

L'exposant d'une matrice primitive M , $\text{Exp}(M)$, a été défini comme le plus petit entier m tel que M^m est positive; sachant que les zéros d'une matrice primitive sont périssables on peut dire que $\text{Exp}(M)$ est le plus petit entier m tel que M^m ne possède plus de zéros périssables. Par suite on peut définir l'exposant étendu d'une matrice non-négative M , noté $\text{EExp}(M)$, comme le plus petit entier m , s'il existe, tel que M^m ne possède que des zéros persistants; dans le cas irréductible l'exposant étendu coïncide avec l'exposant, d'où le Théorème suivant qui étend le résultat de [3] :

Théorème 9. *Soit une matrice non-négative M , de taille n , irréductible et de diagonale positive alors M^{m-1} est positive*

Démonstration. Comme M est irréductible elle ne possède pas de zéro persistant, donc, comme sa diagonale est positive, elle ne possède que des zéros périssables; par suite (Théorème 2) M^{m-1} ne possède pas de zéros, donc est positive. $\square$

Récapitulons Soit une matrice non-négative M

- si M est à diagonale positive ses zéros seront persistants et/ou périssables
- si M est irréductible et possède (au moins) sur sa diagonale un terme non nul elle est primitive
- si la diagonale de M est non-négative : zéros persistants, périssables, périodiques sont possibles

Références

- 1 R.A. Brualdi, A combinatorial Approach to Matrix Theory and its Applications, R.A.Brualdi, R. Cvetkovic, CRC Press-2009
- 2 R.A. Brualdi, H.J. Ryser, Combinatorial Matrix Theory, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Cambridge University Press, 1991.
- 3 R.A. Brualdi, Matrices permutation equivalent to irreducible matrices and applications, Linear Multilin. Alg. vol 7, PP1-12.
- 4 F.R. Gantmacher Matrix Theory, Chelsea Publishing Company, 1974.
- 5 H.Minc, Nonnegative Matrices, Wiley Interscience Publications, 1988.
- 6 Peitgen, Jurgens, Saupe, , Fractals for the Classroom-shelves, Springer Verlag.

- 7 J.S.. Schwarz, L'application des demi-groupes à l'étude des matrices non-négatives, Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, Tome 20 (1966-1967) no. 1, Exposé no. 2.