

# Une Etude élémentaire des zéros des matrices non-négatives

PAR PATRICK TELLER

3 février 2026

## Résumé

« Frobenius discovered a remarkable connexion between the spectral properties of an irreducible matrix and its zero pattern, that is the distribution of its zero entries » (Henryk Minc, in « Non-Negative Matrices »).

En fait les zéros et surtout leur évolution nous apprennent beaucoup sur les matrices non-négatives; l'objet de ce travail est l'étude de l'évolution des zéros qui s'affichent dans les puissances d'une matrice non-négative.

$M$ , éventuellement  $N$  ou  $A$ , désignera une matrice à  $n$  lignes et colonnes; lorsque la confusion est possible nous distinguerons (au moins dans notre esprit) la matrice « encore vide », que nous appellerons « tableau », de la matrice au sens usuel, lorsque des valeurs sont assignées aux cases du tableau;

On appellera zéros de  $M^t$  les termes nuls de ces matrices, on appellera support des zéros de  $M^t$  l'ensemble des cases qui affichent la valeur zéro dans la matrice  $M^t$  et le support de  $M^t$  sera noté  $Z(M^t)$ . Les zéros des puissances de  $M$  vont être de plusieurs types, périssables (qui disparaissent avec le temps), persistants (qui sont nuls pour toute puissance  $M^t$ ) ou périodiques (la suite des supports des zéros se répète de manière périodique).

Les notions d'irréductibilité et d'imprimitivité sont caractérisées par des propriétés de l'ensemble des zéros.

Dans le cas d'une matrice imprimitive d'indice d'imprimitivité  $k$  on verra que  $k$  est aussi la période de la suite des supports de zéros.

Les propriétés des zéros d'une matrice réductible ont aussi permis une démonstration élémentaire (et indépendante des graphes exempte d'utilisation des graphes) de l'existence de la forme normale de Frobenius pour les matrices réductibles

## 1 Définitions, conventions et quelques résultats utiles et conventions

Nous nous limiterons à des matrices non-négatives, de taille  $n$ , à coefficients dans un corps commutatif, éventuellement  $\mathbb{C}$  (dans la section 8).

Nous conviendrons, une fois pour toutes que "non-négatif" signifie supérieur ou égal à 0 et "positif" signifie strictement supérieur à 0.

Si  $M$  désigne une matrice non-négative on désignera par  $(i,j)$  la case du tableau dont les coordonnées sont  $x=i, y=j$ , par  $m_{(i,j)}$  la valeur affichée dans la case  $(i,j)$  de  $M$ , par  $M^t$  pour  $t$  entier la puissance  $t$ -ième de  $M$ , par  $m_{(i,j)}^{[t]}$  la valeur affichée dans la même case de la matrice  $M^t$ ; nous dirons aussi que la case  $(i,j)$  est dans l'état  $m_{(i,j)}^{[t]}$  à l'instant  $t$ .

Dans un premier temps nous ne considérerons (sauf indication contraire) que des matrices à diagonale positive .

Nous appellerons zéro persistant une case  $(i,j)$  telle que pour tout  $t$   $m_{(i,j)}^{[t]}=0$  et zéro périssable une case  $(i,j)$  telle que  $\{t \in \mathbf{N}, m_{(i,j)}^{[t]}=0\}$  est borné.

La section 2 d'essence topologique introduit la notion de support des zéros pour étudier les ensembles qu'ils forment. Nous verrons que si la matrice considérée est à diagonale positive la suite des supports des zéros  $Z(M^t)$  est décroissante et ultimement stationnaire; à chaque incrémentation de  $t$  disparaît au moins un zéro périssable.

La section 3 introduit la notion d'essaim, sous-matrice de taille  $p \times (n-p)$  associée à deux ensembles d'indices complémentaires et établit que les configurations de zéros persistants sont les réunions d'essaims nuls.

La section 4 établit dans le cas d'une matrice non-négative positive l'équivalence entre la réductibilité et la présence d'essaims nuls; il est à noter que le lien entre réductibilité et présence d'une sous-matrice extraite de taille  $p \times (n-p)$ , associée à deux ensembles d'indices complémentaires, est connu, mais pas le statut persistant des zéros qu'elles affichent.

La section 5 est consacrée à une démonstration élémentaire du Théorème de la forme normale de Frobenius pour une matrice non-négative, à diagonale positive ou nulle.

La section 6 considère le cas des matrices non-négatives à diagonale non positive; à la correspondance réductible-présence d'essaims nuls s'ajoute celle entre matrices primitives et absence de zéros périodiques.

La « semi-positivité » de la diagonale, c'est à dire le cas où un des termes de la diagonale au moins est positif, est une condition nécessaire, mais non suffisante d'imprimitivité.

La section 7 est consacrée à la périodicité de la suite des supports des zéros, sachant qu'une suite périodique de période 1 est une suite ultimement constante, ce qui indique une matrice primitive et une suite périodique de période strictement supérieure à 1 indique une matrice imprimitive. De plus l'indice d'imprimitivité est la période de la suite des supports des zéros

La section 8 est une galerie d'exemples, essentiellement irréductibles, primitifs et imprimitifs.

La section 9 récapitule.

## 2 Un regard topologique

**Définition 1.** *Support des zéros d'une matrice*

Soit une matrice  $A$  à  $n$  lignes et colonnes on appelle support des zéros de  $A$ , que l'on notera  $Z(A)$ , l'ensemble des cases  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$  qui sont dans l'état nul.

**Proposition 2.** Une petite grammaire pour la fonction  $Z$

Soit  $M, N$  deux matrices non-négatives et  $k \in \mathbb{Z}^*$

i)  $Z(kM) = Z(M)$ .

ii)  $Z(M + N) = Z(M) \cap Z(N)$ .

iii) si pour tout  $(i, j)$   $m_{(i, j)}n_{(i, j)} = 0$  (on dira que les images de  $M$  et  $N$  sont disjointes)  $Z(M \cdot N) = Z(M) \cap Z(N)$ .

iv) si  $P$  est une matrice de permutation  $Z({}^tPMP) = Z(M)$ .

**Démonstration.** La première affirmation est évidente. La seconde découle du fait simple que la somme de deux entiers naturels n'est nulle que si et seulement si les deux sont nuls; la troisième en découle aussi. La quatrième est immédiate dans le cas où  $P$  est la matrice d'une transposition et s'étend ensuite aux permutations quelconques.  $\square$

**Lemme 3.**

Soient  $M$  une matrice non-négative  $s$  et  $t$  deux entiers positifs  $Z(M^s) = Z(M^t) \implies \forall k \in \mathbb{N}, Z(M^{t+k}) = Z(M^{s+k})$

**Démonstration.**

Si nous désignons par  $Y(M^t)$  la matrice définie par 
$$\left\{ \begin{array}{l} y_{(i, j)} = 1 \iff m_{(i, j)}^{[t]} \neq 0 \\ y_{(i, j)} = 0 \iff m_{(i, j)}^{[t]} = 0 \end{array} \right\}$$
 alors  $Z(MM^t) = Z(MY(M^t))$ , donc si  $Z(M^s) = Z(M^t)$  alors  $Y(M^s) = Y(M^t)$ , d'où  $Z(MM^s) = Z(MM^t)$ , c'est-à-dire  $Z(M^{s+1}) = Z(M^{t+1})$ , ce qui permet de démontrer par récurrence que  $\forall k \in \mathbb{N}, Z(M^{t+k}) = Z(M^{s+k})$ .

Reprenant le langage des systèmes dynamiques nous dirons que  $Z(M^t)$  décrit l'état d'un système « sans mémoire ».  $\square$

**Lemme 4.**

Soit un intervalle fini  $E$  de  $\mathbb{N}$ ,  $e$  le maximum de  $E$  et une application  $f$  de  $P(E)$  vers  $P(E)$  définie comme suit: on convient que si  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  est une partie de  $E$  qui ne contient pas  $e$   $f(A) = \{x_1+1, x_2+1, \dots, x_p+1\}$  et sinon  $f(A) = \{x_1+1, x_2+1, \dots, x_p+1\} - \{e+1\} + y_1 + \dots + y_q$ , où  $y_1, \dots, y_q$  sont des éléments fixés de  $E$ , autres que  $e$ .

Alors  $E$  contient un sous-ensemble stable par  $f$ .

**Définition 5.** Distance entre points de  $\{1, \dots, n\}^2$ , distance de Hausdorff de deux parties de  $\{1, \dots, n\}^2$  associée à cette distance

Soient  $(x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2))$  on désignera leur distance par  $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ .

Soient deux parties  $A$  et  $B$  de  $[1, \dots, n]^2$ , on appellera distance de Hausdorff de  $A$  et  $B$  la borne inférieure de  $\{\epsilon, \forall a \in A, \exists b \in B, d(a, b) < \epsilon\}$  et de  $\{\epsilon, \forall b \in B, \exists a \in A, d(a, b) < \epsilon\}$  (nous admettrons qu'il s'agit d'une distance sur l'ensemble des parties du tableau  $\{1, \dots, n\}^2$ . [6])

**Proposition 6.** Une suite  $(Z_t, t \in \mathbb{N}^*)$  de parties de  $\{1, \dots, n\}^2$  converge au sens de Hausdorff si et seulement si il existe  $t_0$ , tel que  $\forall t \geq t_0, Z_t = Z_{t_0}$ .

**Démonstration.** Il suffit de remarquer que dans notre cas la distance de Hausdorff est nécessairement un entier non négatif.  $\square$

**Définition 7.**

Soient  $M$  une matrice non-négative et la case  $(i, j) \in [1, \dots, n]^2$ , dans l'état nul à l'instant  $t$ , on dira qu'il s'agit d'un zéro persistant lorsque  $\forall k \in \mathbb{N}^*, m_{(i,j)}^{[k]} = 0$ , ce sera un zéro périssable lorsque  $\exists t_0 \in \mathbb{N}^*, \forall t > t_0, m_{(i,j)}^{[k]} = 1$ .

**Lemme 8.**

Soit  $M$  une matrice non-négative à diagonale positive la suite des supports des zéros est décroissante et minorée par l'ensemble vide; si le nombre de zéros périssable est  $t_1$  alors  $\forall t \geq t_1, Z(M^t) = Z(M^{t_1})$ .

**Démonstration.** Dans le cas de diagonale positive alors par définition,  $m_{(u,v)}^{[t+1]} = m_{(u,v)}^{[t]} m_{(v,v)} + \sum_{k \neq v} m_{(u,k)}^{[t]} m_{(k,v)}$ , or chacun des termes du membre de droite est non négatif, sauf  $m_{(v,v)}$  et  $m_{(u,v)}^{[t]}$  qui sont positifs donc  $m_{(u,v)}^{[t]} > 0 \Rightarrow m_{(u,v)}^{[t+1]} > 0$ .

Donc si  $(i, j)$  appartient à  $(Z(M^{[t+1]}))$  alors  $(i, j)$  appartient aussi à  $(Z(M^{[t]}))$ , d'où la suite  $(Z(M^{[t]}, t \in \mathbb{N}^*))$  est décroissante au sens de l'inclusion.

Comme c'est une suite monotone à valeurs dans un ensemble fini, elle est alors convergente et nous avons vu plus haut qu'une suite, convergente pour la distance de Hausdorff dans l'ensemble des parties de  $\{1, \dots, n\}^2$ , est constante à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe un rang  $t$  à partir duquel les supports des zéros sont identiques, éventuellement vides.

De plus dans le cas d'une matrice non-négative à diagonale positive les zéros ne peuvent pas apparaître mais ils peuvent disparaître.

Nous avons vu que le système est « sans mémoire », par suite si à l'instant  $t_0$  aucun zéro ne « disparaît », alors  $Z(M^{[t_0]}) = Z(M^{[t_0+1]})$ , d'où  $Z$  reste constante à partir de  $t_0$ , ce qui signifie qu'à partir de  $t_0$ , il ne reste plus que des zéros persistants.  $\square$

**Exemple 9.** On considère la matrice

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

Inutile de continuer, le support  $Z(M^3)$  est l'ensemble vide, la suite des supports de zéros est convergente vers l'ensemble vide.

**Exemple 10.**

$Z(M^{[t]})$  tend vers l'union des essais nuls (voir section suivante)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ L'égalité}$$

$Z(M^2) = Z(M)$  entraîne que la suite des supports des zéros est (ultimement)

$$\text{constante et égale à } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3)\}.$$

En résumé:

diagonale positive

essai nul  $\implies Z(M^t)$  tend vers l'union des essais nuls (voir section suivante)

pas d'essai nul  $\implies Z(M^t)$  tend vers l'ensemble vide

### 3 Les zéros persistants des matrices non-négative à diagonale positive.

Comme nous considérons le cas de matrices non-négative à diagonale positive nous pourrions supposer que la matrice considérée ne comporte plus que des zéros persistants.

**Définition 11.** *essai*

Soient  $M$  une matrice non-négative à  $n$  lignes et colonnes et une partition  $(I, J)$  de l'ensemble des indices  $\{1, \dots, n\}$ , on désignera par  $T_{I,J}$  le sous-tableau de  $T$  obtenu en effaçant les lignes dont le numéro est dans  $J$  et les colonnes dont le numéro est dans  $I$  et par  $M_{I,J}$  la sous-matrice obtenue en affectant des valeurs aux cases de  $T_{I,J}$ .  $M_{I,J}$  sera appelé un *essai*, nous nous intéresserons particulièrement aux *essais nuls*.

**Proposition 12.**

Soit une matrice non-négative  $M$  et un essaim nul  $M_{I,J}$  alors l'essaim  $M_{I,J}^2$  est nul

**Démonstration.**

Soit un essaim nul  $M_{I,J}$  et considérons une case  $(u,v)$  de  $T_{I,J}$ , ce qui signifie que  $u \in I$  et  $v \in J$ , si cette case affiche dans  $a$  la valeur  $a_{(u,v)}$ , la valeur affichée dans cette même case de  $A^2$  sera  $a_{(u,v)}^{[2]} = \sum_{k \in [1, \dots, n]} a_{(u,k)} a_{(k,v)}$ , qui s'exprimera, comme  $(I, J)$  est une partition de  $\{1, \dots, n\}$ , sous la forme  $\sum_{k \in I} a_{(u,k)} a_{(k,v)} + \sum_{k \in J} a_{(u,k)} a_{(k,v)}$ . Si  $k$  appartient à  $I$ , comme  $v$  appartient à  $J$ ,  $a_{(k,v)} = 0$  et si  $k$  appartient à  $J$ , comme  $u$  appartient à  $I$ ,  $a_{(u,k)}^{[2]} = 0$ , d'où la valeur affichée dans la case  $(u,v)$  de  $A^2$  est nulle.

De même, comme  $(I, J)$  forment une partition de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $A_{I,J}^2 = 0$  entraînera  $A_{I,J}^4 = 0$  et, de manière générale,  $A_{I,J}^4 = 0$  entraînera  $A_{I,J}^{2^i} = 0$ .

D'autre part la décroissance de la suite  $(Z(A^t))$  qui découle du raisonnement du lemme 6 permet de conclure que les cases de l'essaim sont nulles à tout ordre ce qui démontre que les cases de l'essaim nul  $A_{I,J}$  sont des zéros persistants.  $\square$

**Théorème 13.**

Soit  $A$  une matrice non-négative à diagonale positive, si une droite (ligne ou colonne) comporte  $p$  (supérieur ou égal à 1) zéros persistants il existe un essaim nul qui les contient et tout essaim nul est un ensemble de zéros persistants.

**Démonstration.**

Nous étudierons le cas d'une colonne, celui de la ligne est analogue.

Soit le point  $(i,j)$  et supposons que  $p$  cases de la  $i$ ème colonne dont la case  $(i,j)$  portent des zéros persistants d'où les deux ensembles d'indices  $I$  de cardinal  $p$ , défini par  $I = \{u, a_{(u,j)} = a_{(u,j)}^{[2]} = 0\}$  et  $J = \{k, a_{(k,j)} > 0\}$ .

Ainsi défini le couple  $(I, J)$  est une partition de  $\{1, \dots, n\}$  et  $I$  désigne les zéros de  $A$  qui se trouvent sur la colonne (de  $A^t$ ) qui contient le point  $(i,j)$ .

De son côté quel que soit  $u \in I$   $a_{(u,j)}^{[2]} = \sum_{k \in [1, \dots, n]} a_{(u,k)} a_{(k,j)}$  d'où  $\sum_{k \in [1, \dots, n]} a_{(u,k)} a_{(k,j)} = 0$  que l'on peut décomposer en  $\sum_{k \in I} a_{(u,k)} a_{(k,j)} + \sum_{k \in J} a_{(u,k)} a_{(k,j)} = 0$ , qui se simplifie, en tenant compte des définitions de  $I$  et  $J$ , en  $0 + \sum_{k \in J} a_{(u,k)} a_{(k,j)}$ .

D'où

$\forall u \in I, \forall k \in J, a_{(u,k)} = 0$ , ce qui signifie que  $J$  désigne des zéros de  $A$  qui se trouvent sur la ligne qui contient le point  $(i,j)$  et, comme  $u$  décrit  $I$  et  $k$  décrit  $J$ , la matrice extraite  $A_{I,J}$  est nulle.

Réciproquement soit un essaim nul  $A_{I,J}$  et considérons une case  $(u,v)$  de  $T_{I,J}$ , ce qui signifie que  $u \in I$  et  $v \in J$ . Si sa valeur à l'instant  $t=1$  est  $a_{(u,v)}$ , à l'instant 2 ce sera  $\sum_{k \in [1, \dots, n]} a_{(u,k)} a_{(k,v)}$ , qui s'exprimera, comme  $(I, J)$  est une partition de  $\{1, \dots, n\}$ , sous la forme  $\sum_{k \in I} a_{(u,k)} a_{(k,v)} + \sum_{k \in J} a_{(u,k)} a_{(k,v)}$ .

Si  $k$  appartient à  $I$ , comme  $v$  appartient à  $J$ ,  $a_{(k,v)} = 0$  et si  $k$  appartient à  $J$ , comme  $u$  appartient à  $I$ ,  $a_{(u,k)} = 0$ , d'où la valeur de la case  $(u,v)$  de  $A^2$  est nulle.

On conclut comme dans la proposition 12.

Par suite, comme  $(I,J)$  forment une partition de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $A_{I,J} = 0$  et  $A_{I,J}^2 = 0$  entraînent  $A_{I,J}^3 = 0$  et, de manière générale,  $A_{I,J} = 0$  et  $A_{I,J}^t = 0$  entraînent  $A_{I,J}^{t+1} = 0$ ; ce qui démontre, par récurrence, que les cases de l'essaim nul  $A_{I,J}$  sont des zéros persistants.

□

**Exemple 14.** Dans la matrice ci-dessous on voit un essaim nul de 2 lignes et 4 colonnes, un essaim nul de 3 lignes et 3 colonnes et un essaim nul de

$$5 \text{ lignes et une colonne. } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut alors étendre cette caractérisation aux matrices non-négatives qui ont une diagonale nulle:

**Théorème 15.** diagonale nulle et zéros persistants

Soit une matrice non-négative à diagonale nulle,  $M$  et  $N=M+I$ .

Quel que soit le couple  $(i,j)$ , où  $i \neq j$   $(i,j)$  est un zéro persistant pour  $M$  si et seulement si il l'est pour  $N$ .

La suite  $(Z(M^t))$  tend vers une limite non vide si et seulement si en est de même pour la suite  $(Z(N^t))$  et ces deux limites sont égales.

**Démonstration.** Soit une case  $(i,j)$  hors diagonale, pour tout entier positif  $t$   $N^t = \sum_{k \in \{0, \dots, t\}} \binom{t}{k} M^k$ , d'où l'équivalence  $\forall k \leq t, n_{(i,j)}^{[k]} = 0 \iff \forall k \leq t, m_{(i,j)}^{[k]} = 0$ ; par suite  $(i,j)$  est un zéro persistant de  $N$  si et seulement si il l'est pour  $M$ , or comme  $N$  est à diagonale positive les zéros persistants de  $N$  sont les cases d'un essaim nul, donc il en est de même pour  $M$  et la limite de la suite des supports de zéros de  $M$  est la limite de la suite analogue pour  $N$ , c'est à dire la réunion des essaim nuls.

Ce qui permet d'étendre la définition d'essaims nuls aux matrices non-négatives à diagonale nulle.  $\square$

**Question 1.**

Etant donnée une matrice non-négative  $M$ , à diagonale positive, comment trouver un essaim nul, s'il y en a ?

Comme on l'a vu au dessus on peut supposer qu'il ne reste que des zéros persistants; les essaims étant définis par la donnée de deux intervalles complémentaires dans  $\{1, \dots, n\}$  nous allons opérer comme suit:

Choisir un sous-ensemble de  $\{1, \dots, n\}$  que l'on désignera par  $I$ , déterminer le complémentaire de  $I$  dans  $\{1, \dots, n\}$  que l'on désignera par  $J$ , si  $M_{I,J}$  est nul c'est un essaim nul, sinon considérer un autre sous-ensemble  $I$ .

**Exemple 16.**

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

première étape: chasser les zéros périssables; il suffit de calculer jusqu'à

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 4 & 7 & 1 & 8 \\ 8 & 7 & 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Si on considère la colonne 1  $I = \{2\}$  d'où  $J = \{1, 3, 4, 5\}$  et  $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  qui est nulle.

Si on considère la colonne 3  $I = \{1, 2\}$  d'où  $J = \{3, 4, 5\}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  nulle;

si on a aucun autre raisonnement sur les lignes ne nous indiquera d'essaim nul.

Raisonnement sur les colonnes

Si on considère la colonne 4  $I = \{1, 2, 3, 5\}$  et alors  $J = \{4\}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

est nulle.

On remarque que si on avait opéré sur la base de la matrice d'origine

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ on aurait posé par exemple } I=\{2,3,4\} \text{ et } J=\{1,5\} \text{ et}$$

obtenu une matrice extraite qui n'aurait pas été nulle.

## 4 Matrices non-négatives réductibles et Essaims nuls

**Lemme 17.** *Soit  $M$  une matrice non-négative, elle possède des zéros persistants si et seulement si il existe une matrice de permutation  $P$  telle que  ${}^tPMP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ , où  $B$  et  $D$  sont des matrices carrées.*

**Démonstration.** Soit  $M$  une matrice non-négative qui contient des zéros persistants et, par suite, un essaim nul  $M_{I,J}$ .

Une partie de  $\{1, \dots, n\}$  sera appelée "segment initial" si son minimum est égal à 1 et si elle est connexe dans  $\{1, \dots, n\}$ , elle sera appelée "segment final" si son maximum est égal à  $n$  et si elle est connexe dans  $\{1, \dots, n\}$ .

Rappelons que  $I$  indexe les lignes de  $M_{I,J}$  et  $J$  indexe les colonnes de  $M_{I,J}$ . Une sous-matrice  $M_{I,J}$  occupera le coin Sud-Ouest si et seulement si  $I$  est un segment final et  $J$  un segment initial; Notre objectif sera donc atteint lorsque  $I$  sera devenu un segment final (et par conséquent  $J$  sera devenu un segment initial).

Nous allons construire la permutation  $P$  comme produit de transpositions. Tant que  $I$  n'est pas un segment final (et que  $J$  n'est pas un segment initial) effectuons sur les colonnes de  $M$  la transposition  $P = (min(I), max(\mathbb{C}_{[1, \dots, n]} I))$  qui se traduit par  $I: I - min(I) + max(J)$   $J: J - max(J) + min(I)$ . Comme le minimum de  $I$  croit strictement (et celui de  $J$  décroît strictement) la procédure s'arrête; à ce moment  $I$  est un segment final,  $J$  est un segment initial, les zéros de l'essaim sont regroupés en un bloc Sud-Ouest. Par ailleurs la conjugaison par  $P$  conserve les tailles des sous-matrices, donc le bloc Sud-Ouest obtenu est de taille  $p \times n - p$ , par suite les matrices  $B$  et  $D$  sont carrées.

Réciproquement si on considère une décomposition en blocs  $N = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ , où  $B$  et  $D$  sont carrées de côtés respectif  $n-p$  et  $p$ , le produit par blocs montre que les zéros du bloc Sud-Ouest sont persistants, la multiplication par  $P$  à droite et par  ${}^tP$  à gauche consistant à renuméroter les vecteurs de la base canonique, les zéros de  $N$  correspondent aux zéros de  ${}^tPNP$  donc ce sont des zéros d'ordre infini, ce qui entraîne l'existence d'essaims nuls. De plus nous avons aussi obtenu  $P$  comme composée de transpositions; cette procédure sera appelée "procédure de relocalisation".  $\square$

**Définition 18.** Matrices réductibles  $M \in \mathcal{M}_n R^{*+}$  est dite réductible s'il existe une matrice de permutation  $P$  telle que  ${}^t P M P = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$  où  $(B, D) \in \mathcal{M}_p R^{*+} \times \mathcal{M}_{n-p} R^{*+}$  et  $C \in \mathcal{M}_{p, n-p} R^{*+}$ . Une matrice irréductible est une matrice qui n'est pas réductible.

Nous avons montré juste au-dessus qu' une matrice non-négative  $M$  à diagonale positive est réductible si et seulement si elle possède un essaim nul  $M_{I,J}$ .

Aux diverses caractérisations classiques de la réductibilité (ou de l'irréductibilité) [1] nous ajouterons la suivante:

**Théorème 19.** Une matrice non-négative  $M$  est réductible si et seulement si elle possède un essaim nul  $M_{I,J}$

Il pourrait être intéressant de comparer la complexité en moyenne de la recherche d'un essaim nul (un seul suffit pour que la matrice ne soit pas irréductible) avec la complexité de l'étude de la connexité forte nécessaire pour déterminer, de manière classique, la réductibilité.

Par ailleurs on remarquera que, si l'existence de sous-matrices de la forme  $M_{I,J}$ , où  $(I,J)$  est une partition de  $\{1,2,\dots,n\}$ , n'est pas nouvelle, ces matrices n'ont pas été étudiées en elles-mêmes. [4]

## 5 Le Théorème sur la forme normale de Frobenius (s'appuie sur ce qui précède mais sans effet sur ce qui suit)

Nous pouvons désormais démontrer le

**Théorème 20.** *Le Théorème de Frobenius*

Soit  $M$  une matrice non-négative dont les zéros sont d'ordre infini, il existe une matrice de permutation  $P$  telle que  ${}^t P M P$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & \dots & M_{1p} \\ 0 & M_{22} & \dots & \dots & M_{2p} \\ 0 & 0 & M_{33} & \dots & M_{3p} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & M_{pp} \end{pmatrix}, \text{ où les blocs } M_{ii} \text{ sont irréductibles.}$$

L'ensemble des blocs de la diagonale est unique, à l'ordre près.

**Démonstration.** On appellera  $f$  l'endomorphisme représenté dans la base canonique de l'espace  $M$  par la matrice  $A$ .

On reprend la procédure de relocalisation qui fournit une matrice de permutation  $P$  telle que  ${}^tPMP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ , si  $B$  n'est pas irréductible on lui applique la relocalisation d'où une matrice de permutation  $R$  telle que  ${}^tRBR = \begin{pmatrix} B_1 & C_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$  et on remplace  $B$  en conséquence. On opère de même avec  $D$  si celle-ci n'est pas irréductible. On continue ainsi tant qu'apparaissent des matrices réductibles. En fin de compte il existe une matrice de

permutation  $T$  telle que  ${}^tTMT$  est de la forme 
$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & .. & .. & M_{1p} \\ 0 & M_{22} & .. & .. & M_{2p} \\ 0 & 0 & M_{33} & .. & M_{3p} \\ 0 & .. & .. & .. & \\ 0 & 0.. & .. & .. & M_{pp} \end{pmatrix},$$

où les blocs  $M_{ii}$  sont irréductibles. L'irréductibilité des blocs de la diagonale découle de la procédure choisie: lorsqu'un bloc carré est créé, s'il n'est pas irréductible il possède un essaim et on procède à sa relocalisation.  $\square$

Si la démonstration présentée ici pour la forme normale semble intéressante car elle est élémentaire et ne nécessite pas d'éléments de la théorie des graphes, le Théorème établit aussi dans sa forme classique l'unicité (à l'ordre près) de la famille des blocs diagonaux; le lecteur est renvoyé à [2].

**Démonstration.** Soit une matrice non-négative à diagonale positive, on peut lui appliquer le Théorème: il existe une matrice de permutation  $T$

telle que  ${}^tTBT$  est sous forme normale 
$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & .. & .. & M_{1p} \\ 0 & M_{22} & .. & .. & M_{2p} \\ 0 & 0 & M_{33} & .. & M_{3p} \\ 0 & .. & .. & .. & \\ 0 & 0.. & .. & .. & M_{pp} \end{pmatrix}.$$
 Par

suite  ${}^tTAT = {}^tTBT - I = \begin{pmatrix} M_{11} - I & M_{12} & .. & .. & M_{1p} \\ 0 & M_{22} - I & .. & .. & M_{2p} \\ 0 & 0 & M_{33}I & .. & M_{3p} \\ 0 & .. & .. & .. & \\ 0 & 0.. & .. & .. & M_{pp} \end{pmatrix}$  et ce sera

la forme normale de  $A$  si on prouve que les  $M_{ii} - I$  sont bien des matrices irréductibles. Si  $M_{ii} - I = \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & W \end{pmatrix}$  alors  $M_{ii} = \begin{pmatrix} I+U & V \\ 0 & W+I \end{pmatrix}$  ce qui contredirait l'irréductibilité de  $M_{ii}$ .

$M_{ii} - I$  sera à termes non-négatifs si et seulement si les termes de la diagonale de  $M_{ii}$  sont positifs: considérons deux matrices carrées  $U$  et  $V$  et une matrice de permutation  $P$  telle que  $U = P^{-1}VP$ ,  $U$  décrit le même endomorphisme que  $V$  mais relativement à des bases qui se correspondent, à leur numérotation près, ce qui signifie que les termes de la diagonale de  $U$  et ceux de celle de  $V$  sont identiques, à l'ordre près.

Par suite les termes des diagonales des matrices  $M_{ii}$  sont identiques, à l'ordre près, à ceux de la diagonale de  $B$  qui sont supérieurs ou égaux à 1. Donc les matrices  $M_{ii} - I$  sont non-négatives, ce qui entraîne que  ${}^tTAT = {}^tTBT - I$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} M_{11} - I & M_{12} & \dots & \dots & M_{1p} \\ 0 & M_{22} - I & \dots & \dots & M_{2p} \\ 0 & 0 & M_{33} - I & \dots & M_{3p} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & M_{pp} - I \end{pmatrix}. \quad \square$$

## 6 Le cas d'une matrice non-négative à diagonale non positive

Désormais nous supposons que la diagonale de  $M$  comporte au moins un zéro; la notion de matrice primitive sera désormais centrale.

**Définition 21.** Une matrice non-négative  $M$  est dite primitive lorsqu'il existe un entier positif  $m$  tel que  $M^m > 0$  et le plus petit  $m$  pour lequel cette inégalité est vraie est appelé indice de  $M$ . On voit aisément qu'une matrice doit être irréductible pour être primitive.

Une matrice irréductible qui n'est pas primitive, est appelée imprimitive.

**Théorème 22.** Une matrice  $M$  est primitive si et seulement si ses zéros sont périssables

*Démonstration.* immédiat □

**Théorème 23.** La suite des supports de zéros et la primitivité

Soit une matrice non-négative et irréductible  $M$  les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- i)  $M$  est primitive
- ii) la suite des supports de zéros tend vers l'ensemble vide

**Théorème 24.**

Une matrice non-négative irréductible, dont l'un des termes de la diagonale au moins est positif, est primitive. [5]

**Démonstration.**

Soit  $k$  tel que  $m_{k,k} > 0$  pour tout  $j$  il existe un entier  $t_i$  tel que  $m_{i,k}^{t_i} > 0$ , par suite pour tout entier  $t$  supérieur à l'ensemble (fini) des  $t_i$   $m_{i,k}^t > 0$ . De même il existe un entier  $s$  tel que pour tout entier supérieur à  $s$   $m_{k,j}^s > 0$ . D'où  $m_{i,j}^{2s} > 0$ .  $\square$

D'où, si une matrice non-négative et irréductible est imprimitive sa diagonale est nulle; attention cette condition n'est pas suffisante pour que la matrice soit imprimitive: la matrice suivante est non-négative, irréductible, sa diagonale est nulle mais on pourra vérifier qu'elle n'est pas imprimitive (par exemple au moyen des méthodes des sections suivantes):

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme il y avait un indicateur sur le moment de disparition des zéros périssables (section 2) il existe un indicateur pour qui veut savoir, dans le cadre de l'irréductibilité, si il y a primitivité ou imprimitivité.

**Proposition 25.**

*Si  $M$  est une matrice non-négative et imprimitive son exposant est inférieur ou égal à  $(n-1)^2+1$ . [6]*

Donc le cas d'une matrice non-négative irréductible, et dont la diagonale possède entre 1 et  $n-1$  termes non nuls, est résolu.

Il ne reste plus que le cas d'une matrice non-négative, irréductible et à diagonale nulle.

## 7 Sur la période

Le tableau que nous considérons est fini donc les supports des zéros appartiennent à un ensemble fini, par suite il existe nécessairement deux entiers distincts  $s < t$  tels que  $Z(M^s) = Z(M^t)$ , qui entraîne  $M^{s+1} = M^{t+1}$ , puis  $Z(M^{s+1}) = Z(M^{t+1}) \dots$

D'où la suite des supports des zéros est périodique.

**Théorème 26.** *La forme de Frobenius pour les matrices irréductibles et imprimitives*

*Soit  $A$  une matrice non-négative, irréductible et imprimitive  
il existe une matrice de permutation  $P$  telle que  ${}^tPAP =$*

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A_{34} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{k-1k} \\ A_{k1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} [4]$$

**Proposition 27.** *Avec les notations précédentes*

*si  $u$  et  $u'$  sont des entiers non congrus modulo  $k$   $Z(A^u) \neq Z(A^{u'})$*

**Démonstration.**

On sait [4] qu'il existe une matrice de permutation  $P$  telle que  ${}^tPAP =$

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A_{34} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{k-1k} \\ A_{k1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et par suite } {}^tPA^mP =$$

$$\begin{pmatrix} 0_k & \dots & \dots & G_{1,m+1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & G_{2,m+2} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & G_{m,k} \\ G_{m+1,1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & G_{k,m-1} & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \text{ on retient que}$$

les blocs pertinents pour  ${}^tPA^mP$  sont ceux d'indice  $(i,j)$ , où  $j-i \equiv m[k]$ ;

Par suite si on considère deux entiers  $m$  et  $m'$  non congrus modulo  $k$  les supports des zéros des matrices  ${}^tPA^mP$  et  ${}^tPA^{m'}P$  ne sont pas égaux et, comme  $P$  est une matrice de permutation, les supports des zéros de  $A^m$  et  $A^{m'}$  non plus.  $\square$

Pour déterminer la période de la suite des supports des zéros:

**Théorème 28.** *Indice d'imprimitivité et période de la suite des supports de zéros*

*Une matrice non-négative irréductible  $M$  est imprimitive si et seulement la suite des supports de zéros est périodique, de période strictement supérieure à 1, et dans ce cas la période est égale à l'indice d'imprimitivité*

Démonstration

On sait [4] que le polynôme caractéristique des matrices non-négatives et irréductibles est de la forme  $X^{n-km} \prod_{j=1}^m (X^k - \varpi_j)$ , où  $k$  est l'indice d'imprimitivité,  $m$  un entier naturel et les  $\varpi_j$  des scalaires.

Nous avons besoin du polynôme minimal de  $M$ , celui-ci pourra contenir une puissance moins élevée de  $X$  et, si certains des  $\varpi_j$  sont égaux entre eux le nombre de facteurs de la forme  $(X^k - \varpi_j)$  pourra être réduit; posons donc le polynôme minimal  $\pi(X) = X^u \prod_{j=1}^v (X^k - \varpi_j)$  que nous écrirons  $\pi(X) = X^{u+kv} - \sum_{w=0}^{v-1} a_w X^{u+kw}$ .

L'isomorphisme naturel entre l'algèbre  $K[M]$  et l'algèbre quotient  $K[X]/\pi(X)$  va permettre d'exprimer l'ensemble des puissances de  $M$  dans la base  $(I, M, \dots, M^{u+kv-1})$  sous la forme du « tableau de conversion » qui suit; dans ce tableau les colonnes désignent les puissances de  $M$  et dans la colonne d'une puissance  $M^t$  on trouve les coordonnées de la matrice  $M^t$  dans la base  $(I, M, \dots, M^{u+kv-1})$ .

Ce tableau se construit par tranches de  $k$  colonnes, la première tranche est constituée des premières colonnes  $(\Gamma_0, \dots, \Gamma_{u+kv-1})$  qui contiennent chacune bien entendu un « 1 » et  $u+kv-1$  coordonnées nulles et la colonne suivante exprime  $\Gamma_{u+kv}$  sous la forme  $\sum_{w=0}^{v-1} a_w M^{u+kw}$ .

si on désigne par  $S_{u+kv}$  l'ensemble des indices des coordonnées non nulles de  $\Gamma_{u+kv}$ ,  $S_{u+kv}$  est inclus dans l'ensemble des entiers congrus à  $u$  modulo  $k$ .

Les colonnes suivantes, de  $\Gamma_{u+kv+1}$  à  $\Gamma_{u+kv+k-1}$  découlent de  $\Gamma_{u+kv}$ : l'égalité  $M^{u+kv} = \sum_{w=0}^{v-1} a_w M^{u+kw}$  entraîne pour tout entier  $j \in \{0, \dots, k-1\}$   $M^{u+kv+j} = \sum_{w=0}^{v-1} a_w M^{u+kw+j}$ .

Mais pour  $j=k$  on écrira  $M^{u+kv+k} = \sum_{w=0}^{v-1} a_w M^{u+kw+k}$ , et on y substituera au terme  $a_{v-1} M^{u+k(v-1)+k}$ , qui n'appartient pas à la base, la somme  $a_{v-1} \sum_{z=0}^{v-1} a_z M^{u+kz+k}$  on déduit la colonne  $\Gamma_{u+kv+k}$ :

$$\begin{aligned} M^{u+kv+k} &= \sum_{w=1 \dots v} a_{w-1} M^{u+kw+k} + a_{v-1} M^{u+kv+k} \\ &= \sum_{w=1 \dots v} a_{w-1} M^{u+kw+k} + a_{v-1} M^{u+kv+k} = \sum_{w=1 \dots v-1} a_{w-1} M^{u+kw+k} \\ &+ a_{v-1} (\sum_{z=0 \dots v-1} a_z M^{u+kz+k}) = \text{la colonne } \Gamma_{u+kv+k} \text{ est } a_{v-1} a_0 M^{u+k} + \\ &\sum_{w=1 \dots v} (a_{v-1} a_z + a_{w-1}) M^{u+kw+k}. \end{aligned}$$

Les tranches suivantes de ce tableau de conversation suivent le même principe.

Introduisons la notation  $S$  pour désigner l'ensemble des indices des coordonnées nulles de si on désigne par  $S_{u+kv}$  l'ensemble des indices des coordonnées non nulles de  $\Gamma_{u+kv}$ ,  $S_{u+kv}$  est inclus dans l'ensemble des entiers congrus à  $u$  modulo  $k$ .

En ce qui concerne la colonne suivante  $S_{u+k(v+1)}$  est produit comme suit:

on substitue dans  $\Theta^k(S_{u+kv})$  le terme  $u+kv+k$  par  $S_{u+kv}$

Finalement  $S_{u+k(v+1)} = (\Theta^k(S_{u+kv}) \setminus \{u+kv\}) \cup S_{u+kv}$ , où  $\Theta$  désigne l'incrément d'une unité.



Le polynôme minimal est  $X^6 - 2X^3 + 1$

Ci-dessous le tableau de conversion de  $M$  relativement à la base canonique de  $K[M]$ , on suppose que le polynôme minimal de  $M$  est  $(X^6 - 2X^3 + 1)$ .

$M^t$	I	M	$M^2$	$M^3$	$M^4$	$M^5$	$M^6$	$M^7$	$M^8$	$M^9$	$M^{10}$	$M^{11}$	$M^{12}$	$M^{13}$	$M^{14}$
1	1						-1		-2				-3		
M		1						-1		-2				-3	
$M^2$			1						-1		-2				..
$M^3$				1			2			3			4		
$M^4$					1			2			3			4	
$M^5$						1			2			3			.
..															

## 8 Galerie d'exemples

**Exemple 30.**

Soit la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , de polynome caractéristique  $X^4 - 2X^2 - 2X$

$$M^4 = 2M^2 + 2M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}; Z(M^4) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = 2M^3 + 2M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 8 & 6 & 2 \\ 8 & 10 & 6 & 4 \end{pmatrix}; Z(M^5) = \emptyset$$

$$M^6 = 2M^3 + 4M^2 + 4M = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 8 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 2 \\ 10 & 14 & 8 & 6 \\ 14 & 18 & 12 & 6 \end{pmatrix}; Z(M^6) = \emptyset$$

Comme  $Z(M^5) = Z(M^6)$  la suite des supports des zéros est donc constante à partir de  $t=5$ ; cette constante est l'infini,  $M$  est donc primitive.

**Exemple 31.**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ polynôme caractéristique } X^5 - 2X^3 + X$$

polynôme minimal  $X(X^2-1)^2$

$$M^5 = 2M^3 - M; Z(M^5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^6 = 2M^4 - M^2; Z(M^6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^7 = 3M^3 - 2M; Z(M^7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Z(M^7) = Z(M^5)$  donc la suite des supports de zéros est ultimement 2-périodique; nous dirons que la matrice est imprimitive.

**Exemple 32.**  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; un polynôme annulateur est  $X^4 - 2X^2 + 1$ ,

le reste de la division euclidienne de  $X^5$  par  $X^4 - 2X^2 + 1$  est égal à  $2X^3 - X$ , le reste de la division euclidienne de  $X^6$  par  $X^4 - 2X^2 + 1$  est  $3X^2 - 2$ , le reste de la division de  $X^7$  par  $X^4 - 2X^2 + 1$  est égal à  $3X^3 - 2X$ ,

$$Z(3M^3 - M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Z(3M^2 - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Z(2M^3 +$$

$$2M) = Z(M^3) \cap Z(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ la suite des supports de zéros est ul-}$$

mement périodique de période 2.

Factorisation du polynôme minimal  $(X^2 - 1)^2$ .

**Exemple 33.**  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; son polynôme minimal est  $X^3 - 4X$ , le

reste de la division euclidienne de  $X^3$  par  $X^4 - 4X^2$  est égal à  $X^3$ , le reste de la division euclidienne de  $X^2$  par le polynôme caractéristique est  $X^2$ , le reste de la division de  $X$  par  $X^4 - 4X^2$  est égal à  $X$ .

Or  $Z(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Z(M^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Z(M^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Z(M^3) = Z(M)$  et  $Z(M^2) \neq Z(M)$ ; la suite des supports

de zéros affiche la même valeur aux instants 1 et 3 donc la suite des supports de zéros est ultimement 2-périodique.

Factorisation du polynôme minimal  $X(X^2-4)$

**Exemple 34.**  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; son polynôme caractéristique est  $X^4 -$

$X^2 - X$ , le reste de la division euclidienne de  $X^7$  par  $X^4 - X^2 - X$  est égal à  $X^3 + 2X^2 + X$ , le reste de la division de  $X^6$  est égal à  $X^3 + X^2 + X$ .

Or  $Z(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Z(M^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Z(M^3) =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Z(M^3) \cap Z(M^2) \cap Z(M)$  est égal à  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  donc  $Z(M^3 +$

$2M^2 + M) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , de même que l'intersection  $Z(M^3) \cap Z(M^2)$ ; d'où

la suite des supports de zéros affiche la même valeur aux instants 7 et 6 donc la suite des supports de zéros est ultimement constante.

**Exemple 35.**  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de  $M$  est  $X^4 - 2X^2 - 2X - 1$ , les quotients

de  $X^7$  et de  $X^8$  par le polynôme caractéristique sont des polynômes de degré 3, pleins, donc  $Z(M^7)$  et  $Z(M^8)$  sont des combinaisons linéaires pleines de  $Z(I)$ ,  $Z(M)$ ,  $Z(M^2)$  et de  $Z(M^3)$ . Or l'intersection de ces quatre supports est vide, donc  $Z(X^7) = Z(X^8) = \emptyset$ .

**Exemple 36.**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

polynôme caractéristique est  $X^4 - 2X$ .

On constate que  $Z(M^4) = Z(M)$ ,  $Z(M^3) \neq Z(M)$ ,  $Z(M^2) \neq Z(M)$ . La suite des supports de zéros est donc 3 - périodique.

Le polynôme minimal est  $X^4 - 2X$ .

**Théorème 37.** dû à Wielandt [1]

Soit  $M$  une matrice non-négative, irréductible

i) si

$$\forall t \leq (n-1)^2 + 1, Z(C) \neq \emptyset, M \text{ est imprimitive}$$

ii) si la suite des supports de zéros est  $s$ -périodique, de période  $s > 1$ ,  $M$  est imprimitive et  $s$  est l'indice de primitivité de  $M$ .

## 9 Récapitulons

### 9.1 La nature des matrices non-négatives

i) Le critère de réductibilité repose sur les essais nuls; on a vu combien d'incrémentations attendre pour être débarassés des zéros périssables.

La complexité est difficile à juger, il faudrait étudier la complexité en moyenne.

ii) La démarcation entre matrices irréductibles primitives et imprimitives se fait au moyen de la recherche de la périodicité.

Les outils nécessaires: polynôme caractéristique, division euclidienne de polynômes plaident pour une faible complexité et le résultat suivant de Wielandt nous indique le nombre maximal d'incrémentations à tester dans la recherche de la primitivité.

**Théorème 38.**

Soit  $M$  une matrice non-négative, irréductible

si

$$\forall t \leq (n-1)^2 + 1, Z(C) \neq \emptyset, M \text{ est imprimitive [6]}$$

ii) si la suite des supports de zéros est  $s$ -périodique, de période  $s > 1$ ,  $M$  est imprimitive et  $s$  est l'indice de primitivité de  $M$ .

## 9.2 Limites et convergence des suites de supports des zéros

La suite des supports des zéros converge vers l'union des essaims nuls.

La suite des supports des zéros converge vers l'ensemble vide dans le cas des matrices réductibles, primitives.

La suite des supports des zéros diverge dans le cas des matrices irréductibles imprimitives et la période est égale à l'indice d'imprimitivité.

Soit une matrice non-négative  $M$

o) la suite  $(Z(M^t))$  est bornée

i) si  $M$  contient un essaim nul la suite  $(Z(M^t))$  converge vers la réunion des essaims nuls.

ii) s'il existe un entier positif  $t_0$  tel que  $Z(M^{t_0}) = Z(M^{t_0+1})$  la suite  $(Z(M^t))$  converge vers  $Z(M^{t_0})$ .

Si la limite est une partie non-vide du tableau on est dans le cas o)i); si c'est l'ensemble vide  $M$  est primitive).

iii) s'il existe deux entiers distincts  $r$  et  $s > 1$  tels que  $Z(M^r) = Z(M^{r+s})$  la suite  $(Z(M^t))$  est  $s$ -périodique (auquel cas  $M$  est imprimitive).

**Remarque 39.**

La proposition 9 a montré que i) et ii) sont équivalents.

[1] R.A. Brualdi, J. Rysera, Combinatorial Matrix Theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1991

[2] F.R. Gantmacher, Matrix Theory, Chelsea Publisher

[3] Gorgi, Nonnegative square matrices:irreducibility, reducibility, primitivity and some economic applications. univerty of Pavia

[4] H. Minc, Non Negative Matrices, Wiley Interscience publication 1988

[5] R. Solow, On the structure of linear models, Econometrica, 20,1952, 29-46.

[5] H. Wielandt, Unzerlegbare, nicht negativen Matrizen,Mathematische Zeitschrift (1950). Volume: 52, page 642-648