Une Etude élémentaire des zéros des matrices non-négatives

par Patrick Teller

21 janvier 2026

Résumé

« Frobenius discovered a remarkable connexion between the spectral properties of an irreducible matrix and its zero pattern, that is the distribution of its zero entries » (Henryk Minc, in « Non-Negative Matrices »).

L'objet de ce travail est l'étude de l'évolution des zéros qui s'affichent dans les puissances d'une matrice non-négative.

M, éventuellement N ou A, désignera une matrice à n lignes et colonnes; lorsque la confusion est possibles nous distinguerons (au moins dans notre esprit) la matrice « encore vide », que nous appellerons « tableau », de la matrice au sens usuel, lorsque des valeurs sont assignées aux cases du tableau;

On appellera zéros de M^t les termes nuls de ces matrices, on appellera support des zéros de M^t l'ensemble des cases qui affichent la valeur zéro dans la matrice M^t et le support de M^t sera noté $Z(M^t)$. Les zéros des puissances de M vont être de plusieurs types, périssables (qui disparaissent avec le temps), persistants (qui sont nuls pour toute puissance M^t) ou périodiques (la suite des supports des zéros se répète de manière périodique.

à élaguer

La nature de ces zéros va présenter des correspondances avec les notions de réductibilité et de primitivité des matrices; en particulier les zéros persistants se regroupent suivant des structures, que nous appellerons essaims et qui représentent les obstacles à l'irréductibilité. La prise en compte des essaims nous permettra une démonstration élémentaire de la forme normale de Frobenius. Nous distinguerons le cas où la diagonale de la matrice M est positive du cas où elle ne l'est pas, ce qui nous permettra d'étudier la primitivité éventuelle de M ainsi que la périodicité éventuelle de la suite des supports des zéros.

1 Définitions et conventions de base

Nous nous limiterons à des matrices non-négatives.

Nous conviendrons, une fois pour toutes que "non-négatif" signifie supérieur ou égal à 0 et “positif ” signifie strictement supérieur à 0.

Si M désigne une matrice non-négative on désignera par (i,j) la case du tableau dont les coordonnées sont x=i,y=j, par $m_{(i,j)}$ la valeur affichée dans la case (i,j) de M, par M^t pour t entier la puissance t-ième de M, par $m_{(i,j)}^{[t]}$ la valeur affichée dans la même case de la matrice M^t; nous dirons aussi que la case (i,j) est dans l'état $m_{(i,j)}^{[t]}$ à l'instant t.

Si nous désignons par Y(M^t) la matrice définie par $\begin{cases} y_{(i,j)} = 1 \Longleftrightarrow m_{(i,j)}^{[t]} \neq 0 \\ y_{(i,j)} = 0 \Longleftrightarrow m_{(i,j)}^{[t]} = 0 \end{cases}$, alors Z(M$M^t$)=Z(MY($M^t$)), donc si Z($M^s$)=Z($M^t$) alors Z($M^{s+1}$)=Z($M^{t+1}$), ce qui permet de démontrer par récurrence que $\forall t \in N^{\star,}$, $\exists s > 0$, Z(M^t)=Z(M^{t+s})$\Longrightarrow \forall k \in N$, Z($M^{t+k}$)=Z($M^{t+s+k}$);.

Reprenant le langage des systèmes dynamiques nous dirons que Z(M^t) décrit l'état d'un système « sans mémoire ».

Dans un premier temps nous ne considérerons (sauf indication contraire) que des matrices à diagonale positive.

Nous appellerons zéro persistant une case (i,j) telle que pour tout t $m_{(i,j)}^{[t]}$=0 et zéro périssable une case (i,j) telle que {t∈**N**, $m_{(i,j)}^{[t]}$=0 } est borné.

La section 2 d'essence topologique introduit la notion de support des zéros pour étudier les ensembles qu'ils forment. Nous verrons que si la matrice considérée est à diagonale positive la suite des supports des zéros $Z(M^t)$ est décroissante et ultimement stationnaire; à chaque incrémentation de t disparaît au moins un zéro périssable.

La section 3 introduit la notion d'essaim, sous-matrice de taille $p \times (n-p)$ associée à deux ensembles d'indices complémentaires et établit que les configurations de nuls persistants sont les réunions d'essaims nuls.

La section 4 établit dans le cas d'une matrice non-négative à diagonale positive l'équivalence entre la réductibilité et la présence d'essaims nuls; il est à noter que le lien entre réductibilité et présence d'une sous-matrice extraite de taille p×$(n-p)$, associée à deux ensembles d'indices complémentaires, est connu, mais pas le statut persistant des zéros qu'elles affichent.

La section 5 est consacrée à une démonstration élémentaire du Théorème de la forme normale de Frobenius pour une matrice non-négative, à diagonale positive ou nulle.

La section 6 considère le cas des matrices non-négatives à diagonale non positive; à la correspondance réductible-présence d'essaims nuls s'ajoute celle entre matrices primitives et absence de zéros périodiques.

La « semi-positivité » de la diagonale, c'est à dire le cas où un des termes de la diagonale au moins est positif, est une condition nécessaire,mais non suffisante de primitivité.

La section 7 est essentiellement consacrée au cas où la diagonale est nulle.

La section 8 porte sur la question de la périodicité éventuelle de la suite des supports des zéros de la suite (M^t).

2 Un regard topologique

Définition 1. *Support des zéros d'une matrice*

Soit une matrice A à n lignes et colonnes on appelle support des zéros de A, que l'on notera Z(A), l'ensemble des cases $(i, j) \in \{1, .., n\}^2$ *qui sont dans l'état nul.*

Proposition 2. *Une petite grammaire pour la fonction Z*

Soit M,N deux matrices non-négatives et $k \in Z^*$
i) $Z(k M) = Z(M)$,
ii) $Z(M + N) = Z(M) \cap Z(N)$.
iii) si M-N est non négative Z(M-N) est l'ensemble des (i,j) tels que $m_{i,j} = n_{i,j}$.

Démonstration. La première affirmation est évidente. La seconde découle du fait simple que la somme de deux entiers naturels n'est nulle que si et seulement si les deux sont nuls. La troisième découle directement de la définition. □

Définition 3. *Distance entre points de* $\{1, .., n\}^2$*, distance de Hausdorff de deux parties de* $\{1, .., n\}^2$ *associée à cette distance*

Soient $(x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2))$ *on désignera leur distance par* $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Soient deux parties A et B de $[1, .., n]^2$*, on appellera distance de Hausdorff de A et B la borne inférieure de* $\{\epsilon, \forall a \in A, \exists b \in B, d(a, b) < \epsilon\}$ *et de* $\{\epsilon, \forall b \in B, \exists a \in A, d(a, b) < \epsilon\}$ *(nous admettrons qu'il s'agit d'une distance sur l'ensemble des parties du tableau* $\{1, .., n\}^2$*. [6]*

Proposition 4. *Une suite* $(Z_t, t \in \mathbb{N}^*)$ *de parties de* $\{1, .., n\}^2$ *converge au sens de Hausdorff si et seulement si il existe* t_0*, tel que* $\forall t \geq t_0, Z_t = Z_{t_0}$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que dans notre cas la distance de Hausdorff est nécessairement un entier non négatif. □

Définition 5.

Soient M une matrice non-négative et la case $(i, j) \in [1, .., n]^2$*, dans l'état nul à l'instant t, on dira qu'il s'agit d'un zéro persistant lorsque* $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $m_{(i,j)}^{[k]} = 0$*, ce sera un zéro périssable lorsque* $\exists t_0 \in \mathbb{N}^*, \forall t > t_0, m_{(i,j)}^{[k]} = 1$.

Lemme 6.

Soit M une matrice non-négative à diagonale positive la suite des supports de zéros est décroissante et minorée par l'ensemble vide; si le nombre de zéros périssable est t_1 alors $\forall t \geq t_1, Z(M^t) = Z(M^{t_1})$.

Démonstration. Dans le cas de diagonale positive alors par définition, $m_{(u,v)}^{[t+1]} = m_{(u,v)}^{[t]} m_{(v,v)} + \sum_{k \neq v} m_{(u,k)}^{[t]} m_{(k,v)}$, or chacun des termes du membre de droite est non négatif, sauf $m_{(v,v)}$ et $m_{(u,v)}^{[t]}$ qui sont positifs donc $m_{(u,v)}^{[t]} > 0 \Rightarrow m_{(u,v)}^{[t+1]} > 0$.

Donc si (i, j) appartient à $(Z(M^{[t+1]}))$ alors (i, j) appartient aussi à $(Z(M^{[t]}))$, d'où la suite $(Z(M^{[t]}, t \in \mathbb{N}^*)$ est décroissante au sens de l'inclusion.

Comme c'est une suite monotone à valeurs dans un ensemble fini, elle est alors convergente et nous avons vu plus haut qu'une suite, convergente pour la distance de Hausdorff dans l'ensemble des parties de $\{1, .., n\}^2$, est constante à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu' il existe un rang t à partir duquel les supports de zéros sont identiques, éventuellement vides.

De plus dans le cas d'une matrice non-négative à diagonale positive les zéros ne peuvent pas apparaître mais ils peuvent disparaître.

Nous avons vu que le système est « sans mémoire », par suite si à l'instant t_0 aucun zéro ne « disparaît », alors Z($M^{[t_0]}$)=Z($M^{[t_0+1]}$), d'où Z reste constante à partir de t_0, ce qui signifie qu'à partir de t_0, il ne reste plus que des zéros persistants. □

Exemple 7. *On considère la matrice*

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},, M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix},$

Inutile de continuer, le support $Z(M^3)$ est l'ensemble vide, la suite des supports de zéros est convergente vers l'ensemble vide.

Exemple 8.

$$Z(M^{[t]}) \text{ tend vers } l'\text{union des essaims nuls (voir section suivante)}$$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *et* $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, *L'égalité* $Z(M^2) = Z(M)$ *entraîne que la suite des supports de zéros est (ultimement) constante et égale à* $\begin{pmatrix} 0 & & 0 & \\ & & & \\ 0 & & 0 & \end{pmatrix}$ *ou* $\{(2,1), (2,3), (4,1), (4,3)\}$.

En résumé:

diagonale positive

essaim nul $\Longrightarrow Z(M^t)$ tend vers l'union des essaims nuls (voirsection suivante)

pas d'essaim nul$\Longrightarrow Z(M^t)$ tend vers l'ensemble vide

3 Les zéros persistants des matrices non-négative à diagonale positive.

Comme nous considérons le cas de matrices non-négative à diagonale positive nous pourrons supposer que la matrice considérée ne comporte plus que des zéros persistants.

Définition 9. *essaim*

Soient M une matrice non-négative à n lignes et colonnes et une partition (I, J) de l'ensemble des indices $\{1, .., n\}$, on désignera par $T_{I,J}$ le sous-tableau de T obtenu en effaçant les lignes dont le numéro est dans J et les colonnes dont le numéro est dans I et par $M_{I,J}$ la sous-matrice obtenue en affectant des valeurs aux cases de $T_{I,J}$. $M_{I,J}$ sera appelé un essaim, nous nous intéresserons particulièrement aux essaims nuls.

Proposition 10.

Soit une matrice non-négative M et un essaim nul $M_{I,J}$ alors l'essaim $M^2_{I,J}$ est nul

Démonstration.

Soit un essaim nul $M_{I,J}$ et considérons une case (u,v) de $T_{I,J}$, ce qui signifie que $u \in I$ et $v \in J$, si cette case affiche dans a la valeur $a_{(u,v)}$, la valeur affichée dans cette même case de A^2 sera $a^{[2]}{}_{(u,v)} = \sum_{k \in [1,..,n]} a_{(u,k)}\, a_{(k,v)}$, qui s'exprimera, comme (I, J) est une partition de $\{1, ..., n\}$, sous la forme $\sum_{k \in I} a_{(u,k)}\, a_{(k,v)} + \sum_{k \in J} a_{(u,k)} a_{(k,v)}$.
Si k appartient à I, comme v appartient à J, $a_{(k,v)} = 0$ et si k appartient à J, comme u appartient à I, $a^{[2]}_{(u,k)} = 0$, d'où la valeur affichée dans la case (u,v) de A^2 est nulle.

De même, comme (I,J) forment une partition de $\{1,..,n\}$, $A^2_{\mathrm{IJ}} = 0$ entraînera $A^4_{\mathrm{IJ}} = 0$ et, de manière générale, $^{A}_{\mathrm{IJ}}$=0 entraîra $A^{2^t}_{\mathrm{IJ}} = 0$.

D'autre part la décroissance de la suite $(\mathrm{Z}(A^{2^t}))$ qui découle du raisonnement du lemme 6 permet de conclure que les cases de l'essaim sont nulles à tout ordre ce qui démontre que les cases de l'essaim nul A_{IJ} sont des zéros persistants. □

Théorème 11.

Soit A une matrice non-négative à diagonale positive, si une droite (ligne ou colonne) comporte p (supérieur ou égal à 1) zéros persistants il existe un essaim nul qui les contient et tout essaim nul est un ensemble de zéros persistants.

Démonstration.

Nous étudierons le cas d'une colonne, celui de la ligne est analogue.

Soit le point (i,j) et supposons que p cases de la ième colonne dont la case (i,j) portent des zéros persistants d'où les deux ensembles d'indices I de cardinal p, défini par I=$\{$u,$a_{(u,j)} = a^{[2]}_{(u,j)} = 0\}$ et J=$\{$k,$a_{(k,j)} = 1\}$.

Ainsi défini le couple (I,J) est une partition de $\{$1,..,n$\}$ et I désigne les zéros de A qui se trouvent sur la colonne (de A^t) qui contient le point (i,j).

De son côté quel que soit u$\in I$ $a^{[2]}_{(u,j)}$=$\sum_{k\in[1,..,n]} a_{(u,k)}\, a_{(k,j)}$ d'où $\sum_{k\in[1,..,n]} a_{(u,k)}\, a_{(k,j)} = 0$ que l'on peut décomposer en $\sum_{k\in I} a_{(u,k)}\, a_{(k,j)} +$ $\sum_{k\in J} a_{(u,k)}\, a_{(k,j)}$=0, qui se simplifie, en tenant compte des définitions de I et J , en 0+$\sum_{k\in J} a_{(u,k)}\, 1$.

D'où

$\forall u \in I, \forall k \in J, a_{(u,k)} = 0$, ce qui signifie que J désigne des zéros de A qui se trouvent sur la ligne qui contient le point (i,j) et, comme u décrit I et k décrit J, la matrice extraite $A_{I,J}$ est nulle.

Réciproquement soit un essaim nul $A_{I,J}$ et considérons une case (u,v) de $T_{I,J}$, ce qui signifie que $u \in I$ et $v \in J$. Si sa valeur à l'instant t=1 est $a_{(u,v)}$, à l'instant 2 ce sera $\sum_{k\in[1,..,n]} a_{(u,k)}\, a_{(k,v)}$, qui s'exprimera, comme (I, J) est une partition de $\{1, ..., n\}$, sous la forme $\sum_{k\in I} a_{(u,k)}\, a_{(k,v)} +$ $\sum_{k\in J} a_{(u,k)} a_{(k,v)}$.
Si k appartient à I, comme v appartient à J, $a_{(k,v)} = 0$ et si k appartient à J, comme u appartient à I, $a_{(u,k)} = 0$, d'où la valeur de la case (u,v) de A^2

est nulle.

On conclut comme dans la proposition 10.

Par suite, comme (I,J) forment une partition de $\{$1,..,n$\}$, $A_{I,J} = 0$ et $A^2_{I,J} = 0$ entraînent $A^3_{I,J} = 0$ et, de manière générale, $A_{I,J} = 0$ et $A^t_{I,J} =$ 0 entraînent $A^{t+1}_{I,J} = 0$; ce qui démontre , par récurrence, que les cases de l'essaim nul $A_{I,J}$ sont des zéros persistants.

□

Exemple 12. *Dans la matrice ci-dessous on voit un essaim nul de 2 lignes et 4 colonnes, un essaim nul de 3 lignes et 3 colonnes et un essaim nul de 5 lignnes et une colonne.* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut alors étendre cette caractérisation aux matrices non-négatives qui ont une diagonale nullle:

Théorème 13. *diagonale nulle et zéros persistants*

Soit une matrice non-négative à diagonale nulle, M et N=M+I.

Quel que soit le couple (i,j), où $i \neq j$ (i,j) est un zéro persistant pour M si seulement si il l'est pour N.

La suite $(Z(M^t))$ tend vers une limite non vide si et seulement il en est de même pour la suite $(Z(N^t))$ et ces deux limites sont égales.

Démonstration. Soit une case (i,j) hors diagonale, pour tout entier positif t $N^t = \sum_{k \in \{0,...,t\}} \binom{t}{k} M^k$, d'où l'équivalence $\forall k \leqslant t, n^{[k]}_{(i,j)} = 0 \Longleftrightarrow \forall k \leqslant t$, $m^{[k]}_{(i,j)} = 0$; par suite (i,j) est un zéro persistant de N si et seulement il l'est pour M, or comme N est à diagonale positive les zéros persistants de N sont les cases d'un essaim nul, donc il en est de même pour M et la limite de la suite des supports de zéros de M est la limite de la suite analogue pour N, c'est à dire la réunion des essaim nuls.

Ce qui permet d'étendre la définition d'essaims nuls aux matrices non-négatives à diagonale nulle.

□

Question 1.

Etant donnée une matrice non-négative M comment trouver un essaim nul, s'il y en a ?

Comme on l'a vu au dessus on peut supposer qu'il ne reste que des zéros persistants; les essaims étant définis par la donnée de deux intervalles complémentaires dans {1,..,n}nous allons opérer comme suit:

Choisir un sous-ensemble de $\{1,..,n\}$ que l'on désignera par I, déterminer le complémentaire de I dans $\{1,..,n\}$ que l'on désignera par J, si $M_{I,J}$ est nul c'est un essaim nul, sinon considérer un autre sous-ensemble I.

Exemple 14.

Soit M= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si on considère la colonne 1 I=$\{2,3,4\}$ d'où J=$\{1,5\}$ et $M_{\{2,3,4\},\{1,5\}J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas nulle; aucun autre raisonnement sur les lignes ne nous indiquera d'essaim nul.

Raisonnement sur les colonnes

Si considèe la colonne 1 I=$\{3,4,5\}$ et alors J=$\{1,2\}$ et $M_{\{1,2\},\{3,4,5\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est donc un essaim nul.

4 Matrices non-négatives réductibles et Essaims nuls

Lemme 15. *Soit M une matrice non-négative, elle possède des zéros persistants si et seulement si il existe une matrice de permutation P telle que* ${}^tPMP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$*, où B et D sont des matrices carrées.*

Démonstration. Soit M une matrice non-négative qui contient des zéros persistants et, par suite, un essaim nul $M_{I,J}$.

Une partie de $\{1,..,n\}$ sera appelée "segment initial" si son minimum est égal à 1 et si elle est connexe dans $\{1,..,n\}$, elle sera appelée "segment final" si son maximum est égal à n et si elle est connexe dans $\{1,..,n\}$.

Rappelons que I indexe les lignes de $M_{I,J}$ et J indexe les colonnes de $M_{I,J}$. Une sous-matrice $M_{I,J}$ occupera le coin Sud-Ouest si et seulement si I est un segment final et J un segment initial; Notre objectif sera donc atteint lorsque I sera devenu un segment final (et par conséquent J sera devenu un segment initial).

Nous allons construire la permutation P comme produit de transpositions. Tant que I n'est pas un segment final (et que J n'est pas un segment initial) effectuons sur les colonnes de M la transposition $P=(min(I), max(\complement_{[1,..,n]}I)$ qui se traduit par $I\colon I-min(I)+max(J)$ $J\colon J-max(J)+min(I)$. Comme le minimum de I croit strictement (et celui de J décroit strictement) la procédure s'arrête; à ce moment I est un segment final, J est un segment initial, les zéros de l'essaim sont regroupés en un bloc Sud-Ouest. Par ailleurs la conjugaison par P conserve les tailles des sous-matrices, donc le bloc Sud-Ouest obtenu est de taille $p\times n-p$, par suite les matrices B et D sont carrées.
Réciproquement si on considère une décomposition en blocs $N=\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, où B et D sont carrées de côtés respectif n-p et p, le produit par blocs montre que les zéros du bloc Sud-Ouest sont persistants, la multiplication par P à droite et par ${}^tP$ à gauche consistant à renuméroter les vecteurs de la base canonique, les zéros de N correspondent aux zéros de ${}^tPNP$ donc ce sont des zéros d'ordre infini, ce qui entraîne l'existence d'essaims nuls. De plus nous avons aussi obtenu P comme composée de transpositions; cette procédure sera appelée "procédure de relocalisation". □

Définition 16. *Matrices réductibles* $M\in\mathcal{M}_nR^{*+})$ *est dite réductible s'il existe une matrice de permutation P telle que* ${}^tPMP=\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ *où* $(B, D)\in\mathcal{M}_pR^{+*})\times\mathcal{M}_{n-p}R^{+*})$ *et* $C\in\mathcal{M}_{p,n-p}R^{+*})$. *Une matrice irréductible est une matrice qui n'est pas réductible.*

Nous avons montré juste au-dessus qu' une matrice non-négative M à diagonale positive est réductible si et seulement si elle possède un essaim nul $M_{I,J}$.

Aux diverses caractérisations classiques de la réductibilité (ou de l'irréductibilité) [1] nous ajouterons la suivante:

Théorème 17. *Une matrice non-négative M est réductible si et seulement si elle possède un essaim nul* $M_{I,J}$

Il pourrait être intéressant de comparer la complexité en moyenne de la recherche d'un essaim nul (un seul suffit pour que la matrice ne soit pas irréductible) avec la complexité de l'étude de la connexité forte nécessaire pour déterminer, de manière classique, la réductibilité.

Par ailleurs on remarquera que si l'existence de sous-matrices de la forme $M_{I,J}$, où (I,J) est une partition de {1,2,...,n}, n'est pas nouvelle ces matrices n'ont pas été étudiées en elles-mêmes. [4]

5 Le Théorème sur la forme normale de Frobenius (s'appuye sur ce qui précède mais sans effet sur ce qui suit)

Nous pouvons désormais démontrer le

Théorème 18. *Le Théorème de Frobenius*

Soit M une matrice non-négative dont les zéros sont d'ordre infini, il existe une matrice de permutation P telle que ${}^tPMP$ *est de la forme*

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & .. & .. & M_{1p} \\ 0 & M_{22} & .. & .. & M_{2p} \\ 0 & 0 & M_{33} & .. & M_{3p} \\ 0 & .. & .. & .. & \\ 0 & 0.. & .. & .. & \mathrm{Mpp} \end{pmatrix},$$ *où les blocs* M_{ii} *sont irréductibles.*

L'ensemble des blocs de la diagonale est unique, à l'ordre près.

Démonstration. On appellera f l'endomorphisme représenté dans la base canonique de l'espace M par la matrice A.

On reprend la procédure de relocalisation qui fournit une matrice de permutation P telle que ${}^tPMP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, si B n'est pas irréductible on lui applique la relocalisation d'où une matrice de permutation R telle que ${}^tRBR = \begin{pmatrix} B_1 & C_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$ et on remplace B en conséquence. On opère de même avec D si celle-ci n'est pas irréductible. On continue ainsi tant qu'apparaissent des matrices réductibles. En fin de compte il existe une matrice de permutation T telle que ${}^tTMT$ est de la forme $\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & .. & .. & M_{1p} \\ 0 & M_{22} & .. & .. & M_{2p} \\ 0 & 0 & M_{33} & .. & M_{3p} \\ 0 & .. & .. & .. & \\ 0 & 0.. & .. & .. & \mathrm{Mpp} \end{pmatrix}$, où les blocs M_{ii} sont irréductibles. L'irréductibilité des blocs de la diagonale découle de la procédure choisie: lorsqu'un bloc carré est créé, s'il n'est pas irréductible il possède un essaim et on procède à sa relocalisation. □

Si la démonstration présentée ici pour la forme normale semble intéressante car elle est élémentaire et ne nécessite pas d'éléments de la théorie des graphes, le Théorème établit aussi dans sa forme classique l'unicité (à l'ordre près) de la famille des blocs diagonaux; le lecteur est renvoyé

Démonstration. rs non-négative à diagonale positive, on peut lui appliquer le Théorème: il existe une matrice de permutation T telle que ${}^tTBT$ est sous forme normale $\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & .. & .. & M_{1p} \\ 0 & M_{22} & .. & .. & M_{2p} \\ 0 & 0 & M_{33} & .. & M_{3p} \\ 0 & .. & .. & .. & \\ 0 & 0.. & .. & .. & \mathrm{Mpp} \end{pmatrix}$. Par suite ${}^tTAT{=}{}^tTBT-I=$ $\begin{pmatrix} M_{11}-I & M_{12} & .. & .. & M_{1p} \\ 0 & M_{22}-I & .. & .. & M_{2p} \\ 0 & 0 & M_{33}I & .. & M_{3p} \\ 0 & .. & .. & .. & \\ 0 & 0.. & .. & .. & \mathrm{Mpp} \end{pmatrix}$ et ce sera la forme normale de A si on prouve que les $M_{ii}-I$ sont bien des matrices irréductibles. Si $M_{ii}-I=$ $\begin{pmatrix} U & V \\ 0 & W \end{pmatrix}$ alors $M_{ii}=\begin{pmatrix} I+U & V \\ 0 & W+I \end{pmatrix}$ ce qui contredirait l'irréductibilité de M_{ii}.

$M_{ii}-I$ sera à termes non-négatifs si et seulement si les termes de la diagonale de M_{ii} sont positifs: considérons deux matrices carrées U et V et une matrice de permutation P telle que $U=P^{-1}VP$, U décrit le même endomorphisme que V mais relativement à des bases qui se correspondent , à leur numérotation près, ce qui signifie que les termes de la diagonale de U et ceux de celle de V sont identiques, à l'ordre près.

Par suite les termes des diagonales des matrices M_{ii} sont identiques, à l'ordre près, à ceux de la diagonale de B qui sont supérieurs ou égaux à 1. Donc les matrices $M_{ii}-I$ sont non-négatives, ce qui entraîne que ${}^tTAT={}^tTBT-I$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} M_{11}-I & M_{12} & .. & .. & M_{1p} \\ 0 & M_{22}-I & .. & .. & M_{2p} \\ 0 & 0 & M_{33}-I & .. & M_{3p} \\ 0 & .. & .. & .. & \\ 0 & 0.. & .. & .. & M_{\mathrm{pp}}-I \end{pmatrix}. \qquad \square$$

6 Le cas d'une matrice non-négative à diagonale non positive

Désormais nous supposerons que la diagonale de M comporte au moins un zéro; la notion de matrice primitive sera désormais centrale.

Définition 19. *Une matrice non-négative M est dite primitive lorsqu'il existe un entier positif m tel que $M^m>0$ et le plus petit m pour lequel cette inégalité est vraie est appelé indice de M. On voit aisément qu'une matrice doit être irréductible pour être primitive.*

Une matrice irréducible qui n'est pas primitive , est appelée imprimitive.

Théorème 20. *Une matrice M est primitive si et seulement si ses zéros sont périssables.*

Théorème 21. *La suite des supports de zéros et la primitivité*

Soit une matrice non-négative et irréductible M les deux propriété suivantes sont équivalentes:
i) M est primitive
ii) la suite des supports de zéros tend vers l'ensemble vide

Théorème 22.
Une matrice non-négative irréductible, dont l'un des termes de la diagonale au moins est positif, est primitive. [4]

Démonstration.
Soit k tel que $m_{k,k}>0$ pour tout j il existe un entier t_i tel que ${m^{t_i}}_{i,k}>0$,par suite pour tout entier t supérieur à l'ensemble (fini) des t_i ${m^t}_{i,k}>0.$ Demême il existe un entier s tel que pour tout entier supérieur à s ${m^t}_{k,j}>0. D'o$ù ${m^{2t}}_{i,j}>0.$ □

D'où, si une matrice non-négative et irréductible est imprimitive sa diagonale est nulle; attention cette condition n'est pas suffisante pour que la matrice soit imprimitive: la matrice suivante est non-négative, irréductible, sa diagonale est nulle mais on pourra vérifier qu'elle n'est pas imprimitive (par exemple au moyen des méthodes des sections suivantes):

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme il y avait un indicateur sur le moment de disparition des zéros périssables (section 2) il existe un indicateur pour qui veut savoir, dans le cadre de l'irréductibilité, si il y a primitivité ou imprémitivté.

Proposition 23.
Si M est une matrice non-négative et imprimitive son exposant est inférieur ou égal à (n-1)^2+1. [5]

Donc le cas d'une matrice non-négative irréductible, et dont la diagonale possède entre 1 et n-1 termes non nuls, est résolu.

Il ne reste plus que le cas d'une matrice non-négative, irréductible et à diagonale nulle.

7 Sur la période

Le tableau que nous considérons est fini donc les supports des zéros appartiennent à un ensemble fini, par suite il existe nécessairement deux entiers distincts s<t tels que Z(M^s)=Z(M^t), qui entraîne M^s=M^t , puis Z(M^{s+1})=Z(M^{t+1})...

D'où

Si M est une matrice non-négative et s'il existe deux entiers distincts s<t tels que Z(M^s)=Z(M^t) la suite des supports des zéros est périodique.

Pour déterminer la période de la suite des supports des zéros:

Proposition 24.

On exprimera les matrices de la forme M^t comme combinaison linéaire des matrices (I,M,..,M^{r-1}) où r est le degré du polynôme minimal de M.

Lorsque deux puissances $M^{t'}$ et $M^{t''}$ s'expriment comme combinaisons linéaires des mêmes matrices de la base (I,M,..,M^{r-1}) avec des coefficients non nuls on en concluera qu'elles ont le même support de zéros.

Alors |t'-t"| est candidat pour désigner la période de la suite; il suffira de rechercher s'il existe un autre couple, « inférieur », pour déterminer la plus petite période.

Démonstration.

Soit $X^{t'}=\sum_{k=1}^{r-1}\lambda_k X^k$ *que nous traduisons en* $M^{t'}=\sum_{k=1}^{r-1}\lambda_k M^k$*, que nous pouvons réordonner en* $M^{t'}=\sum_{\lambda_k>0}\lambda_k M^k$-$\sum_{\lambda_k<0}\rceil\lambda_k\lceil M^k$*, où* $M^{t'}$*, en tant que puissances d'une matrice non-négative, est non-négative.*

Nous sommes donc le cas iii) de la proposition 6, Z($M^{t'}$*)=*$\{(i,\, j),\ \sum_{\lambda_k>0}\lambda_k m_{(i,j)}^{[k]}=\sum_{\lambda_k<0}|\lambda_k| m_{(i,j)}^{[k]}\}$.

□

Théorème 25.

Soit une matrice non-négative M

o) la suite (Z(M^t*)) est bornée*

i) si M contient un essaim nul la suite (Z(M^t*)) converge vers la réunion des essaims nuls.*

ii) s'il existe un entier positif t_0 *tel que Z(*M^{t_0}*)=Z(*M^{t_0+1}*) la suite (Z(*M^t*)) converge vers Z(*M^{t_0}*).*

Si la limite est une partie non-vide du tableau on est dans le cas o)i); si c'est l'ensemble vide M est primitive).

iii) s'il existe deux entiers distincts r et s>1 tels que Z(M^r*)=Z(*M^{r+s}*) la suite (Z(*M^t*)) est s-périodique (auquel cas M est imprimitive).*

***Remarque* 26.**

La proposition 9 a montré que i) et ii) sont équivalents.

8 Galerie d'exemples

Exemple 27.

Soit la matrice M= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, de polynome caractéristique $X^4 - 2X^2 - 2X$

M^4=$2M^2$+ 2M= $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;Z($M^4$)= $\begin{pmatrix} & & & \\ & & & 0 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

M^5= $2M^3$+ $2M^2$= $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 8 & 6 & 2 \\ 8 & 10 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; Z($M^5$)=$\varnothing$

M^6=$2M^3$+4 M^2+4M= $\begin{pmatrix} 8 & 12 & 8 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 2 \\ 10 & 14 & 8 & 6 \\ 14 & 18 & 12 & 6 \end{pmatrix}$;Z($M^6$)=$\varnothing$

Comme Z(M^5)=Z(M^6) la suite des supports des zéros est donc constante à partir de t=5; cette constante est l'infini, M est donc primitive.

Exemple 28.

M= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; polynome caractéristique X^5-$2X^3$+ X

M^5=$2M^3$- M=;Z(M^5)= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & 0 & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$

M^6=$2M^4$- M^2 ; Z(M^6)= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$

$$\mathrm{M}^7\text{=}3M^3\text{-}2\ \mathrm{M;Z(M}^7)\text{=}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & 0 & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z(M^7)=Z(M^5) donc la suite des supports de zéros est ultimement 2-périodique; nous dirons que la matrice est imprimitive.

Factorisation du polynôme minimal X(X^2−1)^2

Exemple 29. $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*; un polynôme annulateurest* X^4-2X^2*+1, le reste de la division euclidienne de* X^5 *par* X^4*-*$2X^2+1$ *est égal à* $2X^3-X$ *, le reste de la division euclidienne de* X^6 par X^4-2X^2*+1 est* $3X^2-2$*, le reste de la division de* X^7 *par* X^4*-2*X^2+1 *est égal à* $3X^3-2X$*,*

*Z(3*M^3-M*)==*$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *, Z(3*M^2-2I*)=*$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ *et Z(2*M^3+ 2M*)=*$Z(M^3)\cap Z(M)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*la suite des supports de zéros est ultimement périodique de période 2.*

*Factorisation du polyn*ome minimal $(X^2-1)^2$.

Exemple 30. $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*;son polynôme caractéristique est* X^4-4X^2*, le reste de la division euclidienne de* X^3 *par* X^4-4X^2 *est égal à* X^3*, le reste de la division euclidienne de* X^2 *par le polynôme caractéristique est* X^2*, le reste de la division de* X *par* X^4-4X^2*est égal à* X*.*

Or $Z(M)=\begin{pmatrix} 0 & & 0 & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}$,$Z(M^2)=\begin{pmatrix} & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \end{pmatrix}$,$Z(M^3)=\begin{pmatrix} 0 & & 0 & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & & 0 \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}$, $Z(M^3)=Z(M)$ *et* $Z(M^2)\neq Z(M)$ *; la suite des supports de zéros affiche la même valeur aux instants 1 et 3 donc la suite des supports de zéros est ultimement 2-périodique.*

Factorisation du polynôme minimal X(X^2*−4*)

Exemple 31. $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*;son polynôme caractéristique est* X^4-X^2-X*, le reste de la division euclidienne de* X^7 *par* X^4-X^2-X *est égal à* X^3+2X^2+X*, le reste de la division de* X^6 *est égal à* X^3+X^2+X*.*

Or $Z(M)=\begin{pmatrix} 0 & & & 0\\ & 0 & 0 & 0\\ 0 & & 0 & 0\\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $Z(M^2)=\begin{pmatrix} & & 0 & 0\\ 0 & & & 0\\ & 0 & 0 & 0\\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $Z(M^3)=\begin{pmatrix} & & & 0\\ & & 0 & 0\\ 0 & & & 0\\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $Z(M^3)\cap Z(M^2)\cap Z(M)$ *est égal à* $\begin{pmatrix} & & & 0\\ & & & 0\\ & & & 0\\ & & & 0 \end{pmatrix}$ *donc* $Z(M^3+2M^2+M)=\begin{pmatrix} & & & 0\\ & & & 0\\ & & & 0\\ & & & 0 \end{pmatrix}$*, de même que l'intersection* $Z(M^3)\cap Z(M^2)$*; d'où la suite des supports de zéros affiche la même valeur aux instants 7 et 6 donc la suite des supports de zéros est ultimement constante.*

Exemple 32. $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de M est X^4-2X^2-2X-1*, les quotients*

de X^7 *et de* X^8 *par le polynôme caractéristique sont des polynômes de degré 3, pleins, donc Z(*M^7 *)et Z(*M^8*) sont des combinaisons linéaires pleines de Z(I) , Z(M), Z(*M^2*) et de Z(*M^3*). Or l'intersection de ces quatre supports est vide, donc* $Z(X^7)=Z(X^8)=\emptyset$*.*

Exemple 33.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

polynôme caractéristique est X^4-2X.

On constate que Z(M^4)=Z(M), Z(M^3)$\neq Z(M)$, Z(M^2)$\neq Z(M)$.La suite des supports de zéros est donc $3-p$ériodique.

Le polynôme minimal est X^4-2X.

Théorème 34. *Indice d'mprimitivité et période de la suite des supports de zéros*

Une matrice non-négative irréductible M est imprimitive si et seulement la suite des supports de zéros est périodique, de période strictement supérieure à 1, et dans ce cas la période est égale à l'indice d'mprimitivité

Démonstration

On sait [2] que le polynôme caractéristique des matrices non-négatives et irréductibles est de la forme $X^{n-\mathrm{km}}\prod_{j=1}^{m}(X^k-\varpi_j)$, où k est l'indice d'imprimitivité, m un entier naturel et les ϖ_j des scalaires; il nous suffit de l'écrire $\sum_{p=1}^{m-1}x_pX^{n-k(m-p)}+X^{n-\mathrm{km}}$ et la recherche de l'écriture de X^t se fera simplement par la détermination du reste de la division euclidienne de X^t par $\sum_{p=1}^{m-1}x_pX^{\mathrm{kp}}+X^{n-\mathrm{km}}$, d'où il vient que le reste sera un polynôme en X, combinaison linéaire de monômes de la forme $X^{i+\mathrm{kp}}$. Il faut déterminer deux colonnes qui contiennent des combinaisons linéaires des mêmes monômes, ce qui donnera deux supports des zéros qui seront égales.

D'autre part deux colonnes qui contiendront des monômes de degrés non congrus modulo k ne peuvent représenter d'autres supports des zéros.

Exemple 35.

Le polynôme caractéristique sera supposé minimal -X^9+5X^6-2X^3+1

X^t	X^{10}	X^{11}	X^{12}	X^{13}
1			5	
X	1			5
X^2		1		
X^3			-9	
X^4	-2			-9
X^5		-2		
X^6			23	
X^7	5			23
X^8		5		
..				

Les colonnes qui décrivent respectivement X^{10} et X^{13} dans la base du quotient de K[X] par l'idéal engendré par le polynôme caractéristique se lisent X-2X^4+5X^7 et -5+11X^4-5X^7 d'où Z(M^{10})=Z(M^{13}).

Par ailleur les colonnes de X^{11} , de X^{12} ne font pas l'affaire, donc Z(M^{10})=Z(M^{13}) et il n'y a pas de couple de colonnes « plus proches » donc la périodicité est 3, c'està dire l'indice de primitivité. [ ]).

Exercice 1.

Le polynôme caractéristique X^{12}-3X^9+11X^6-7X^3+5

X^t	X^{10}	X^{11}	X^{12}	X^{13}	X^{14}	X^{15}	X^{16}	X^{17}
1						-15		
X				-5			-15	
X^2					-5			-15
X^3						16		
X^4				7			16	
X^5					7			16
X^6						-26		
X^7				-11			-26	
X^8								-26
X^8								
X^9						-2		
X^{10}				3			-2	
X^{11}					3			-2
X^{12}								
X^{13}								
X^{14}								
X^{15}								
X^{16}								
X^{17}								

D'où les colonnes de M^{13} , deM

Théorème 36. *dû à Weilandt [1]*
Soit M une matrice non-négative, irréductible
i) si

$$\forall t \leqslant (n-1)^2+1, Z(C) \neq \varnothing, M \, \text{est imprimitive}$$

ii) si la suite des supports de zéros est s-périodique,de période s>1, M est imprimitive et s est l'indice de primitivité de M.

[1] R.A. Brualdi, J. Rysera, Combinatorial Matrix Theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1991
[2] F.R. Gantmacher, Matrix Theory, Chelsea Publisher
[3] Gorgi, Nonnegative square matrices:irreducibility, reducibility, primitivity and some economic applications. univerity of Pavia
[4] H. Minc, Non Negative Matrices, Wiley Interscience publication 1988

[5] R. Solow, On the structure of linear models, Econometrica, 20,1952, 29-46.

[5] H. Wielandt, Unzerlegbare, nicht negativen Matrizen,Mathematische Zeitschrift (1950). Volume: 52, page 642-648