Inverser la fonction de Sylvester

par Patrick Teller

10 janvier 2023

Soient (A,B)$\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif quelconque, on appellera fonction matricielle de Sylvester S(A,B) associée au couple (A,B) la fonction qui, à toute matrice M$\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, associe la matrice AM-MB$\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; la relation AM-MB=C est essentiellement utilisée comme décrivant la matrice M de manière implicite.

On sait que S(A,B) est un automorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si et seulement si les spectres de A et B sont disjoints et dans ce cas l'application réciproque existe et a été décrite sous forme polynomiale ([2],[4])

Lorsque les spectres ne sont pas disjoints se posent deux problèmes: i) déterminer des conditions sur C pour qu'il existe M telle que AM-MB=C, c'est à dire décrire l'image de S(A,B) ii) déterminer une solution particulière de M en fonction de C.

Face à la grande quantité de travaux qui portent sur le cas où S(A,B) est un automorphisme les travaux qui ont porté sur le cas « général » sont plus rares, on citera Z-Y. Li et B.Zhou [5] et M. Dincic [3], le premier se place dans le cadre de la décomposition spectrale, le second dans le cadre assez proche, celui de la forme de Jordan.

Dans [6] les calculs sont extrémement longs et les formules compliquées.

Dans [3] il est recours à plusieurs « couches » de similitude, ce qui ne nuit bien entendu pas à l'interprétation qualitative des résultats mais les rend peu effectifs.

Dans ce travail la seule similitude utilisée est celle de la décomposition de Frobenius, tandis que les calculs sont réduits au maximum et, ce qui ne gâte rien, la formule obtenue est assez jolie..

Pour la commodité du lecteur des définitions et des résultats classiques sont présentés ci-dessous, sans démonstration.

1 Le cas des matrices compagnons

Définition 1. *Matrice compagnon, matrice cyclique*

Une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \dots & & & & -a0 \\ 1 & \dots & & & & -a1 \\ 0 & 1 & & & & \dots. \\ . & 0 & . & & & \dots \\ 0 & \dots & & \dots & & -a_{n-2} \\ & & \dots & 0 & 1 & -\mathrm{an}-1 \end{pmatrix}$ *sera dite « compagnon », ou compagnon du polynôme* $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$.

Le polynôme caractéristique de la matrice ci-dessus est $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ *; c'est aussi son polynôme minimal.*

Une matrice sera dite « cyclique » lorsqu'elle est semblable à une matrice compagnon.

Le polynôme minimal d'une matrice M sera désigné par $\pi_M(X)$.

Théorème 2. *La décomposition de Frobenius*

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ de polynôme minimal π_A est semblable de manière unique à une somme directe de matrices cycliques $\begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ & & & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \Gamma_p \end{pmatrix}$, *sous la condition que* $\forall i, \pi_{\Gamma_{i+1}} \Big| \pi_{\Gamma_i}$ *et* $\pi_{\Gamma_1} = \pi_A$

De plus la suite des polynômes (π_{Γ_i}), appelés invariants de similitude de f, est entièrement déterminée par A et deux matrices sont semblables si et seulement elles ont les mêmes invariants de similitude.

Dans la suite on supposera A$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & . & -a_1 \\ 0 & 1 & & \dots & \dots \\ \dots & 0 & & \dots & \dots \\ \dots & \dots & & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ et B$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & & . & -b_1 \\ 0 & 1 & & \dots & \dots \\ \dots & 0 & & \dots & \dots \\ \dots & \dots & & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -b_{p-1} \end{pmatrix}$ deux matrices compagnons, C une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

1.1 Rappels

Nous avons besoin des piliers suivants:

i) Soient M=(M_1,..,M_p) et C=(C_1,..,C_p) la relation AM-MB=C s'exprime à l'aide du produit tensoriel comme suit $(I_p \otimes A - {}^tB \otimes I_n)\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ \dots \\ M_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ \dots \\ C_p \end{pmatrix}$, où $I_p \otimes A - {}^tB \otimes I_n = \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & A & -I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A & -I & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & A & -I \\ b_0I & b_1I & \dots & \dots & \dots & b_{p-1}I + A \end{pmatrix}$.

[5]

ii) Si on considère un polynôme P(X), la matrice P(A) est inversible si et seulement si P(X) est premier avec π_A(X).

En particulier si on considère le polynôme P(X)= $X^r + \sum_{i=0}^{r-1} p_i X^i$ qui divise π_A(X) et si on pose P(A)=$(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ alors $\forall k \in \{0, \dots, n-1\} \quad \Gamma_{k+1} = A\Gamma_k$.

Il est immédiat que $\Gamma_1 = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \dots. \\ p_{r-1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma_2 = A\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ p_0 \\ p_1 \\ \dots. \\ p_{r-1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots 0 \end{pmatrix}$, ..., jusqu'à $\Gamma_{n-r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ p_0 \\ p_1 \\ \dots. \\ p_{r-1} \\ 1 \end{pmatrix}$, les colonnes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-r}$ sont linéairement indépendants, mais de plus le fait que P(X) divise π_A(X) permet de montrer qu'elles constituent une base de l'espace des colonnes de la matrice P(A), on posera $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-r})$.

Si P(X) ne divise pas π_A(X) on posera alors Z(X)=P(X)$\wedge\pi_A$(X), les matrices Z(A) et P(A) ont la même image, engendrée par $\Gamma_1 = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \dots. \\ z_{q-1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma_2 = A\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 \\ z_1 \\ \dots. \\ z_{q-1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots 0 \end{pmatrix}$, ..., jusqu'à $\Gamma_{n-q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ z_0 \\ z_1 \\ \dots. \\ z_{r-1} \\ 1 \end{pmatrix}$, où Z(X)=$X^q + \sum_{i=0}^{q-1} z_i X^i$. [1]

Par extension de la notion d'image d'un morphisme nous appellerons image d'une matrice U$\in\mathcal{M}_{p,q}$ l'ensemble des vecteurs UX pour X$\in\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$.

On suppose désormais que n$\geqslant p$.

1.2 Une condition nécessaire et suffisante

L'égalité $\begin{pmatrix} A & -I & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & A & -I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A & -I & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & A & -I \\ b_0I & b_1I & \dots & \dots & \dots & b_{p-1}I+A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ \dots \\ M_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ \dots \\ C_p \end{pmatrix}$ est équivalente au système $\begin{cases} M_2=\mathrm{AM}_1-C_1 \\ \dots \\ \dots \\ M_p=\mathrm{AM}_{p-1}-C_{p-1} \\ b_0M_1+b_1M_2+\cdots+b_{p-1}M_p+\mathrm{AM}_p=C_p \end{cases}$ $\iff$

$$\begin{cases} M_2=\mathrm{AM}_1-C_1 \\ \dots \\ \dots \\ M_p=\mathrm{AM}_{p-1}-C_{p-1} \\ b_0M_1+b_1(\mathrm{AM}_1-C_1)+\ldots+b_{p-1}(A^{p-1}M_1-A^{p-2}C_1-\cdots-C_{p-1})+\mathrm{AM}_p=C_p \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} M_2=\mathrm{AM}_1-C_1 \\ \dots \\ \dots \\ M_p=\mathrm{AM}_{p-1}-C_{p-1} \\ \pi_B(A)M_1=\pi_B^{(1)}(A)C_1+\pi_B^{(2)}(A)C_2+\ldots.+\pi_B^{(p)}(A)C_p \end{cases}$$

où, pour tout i, $\pi_B^{(i)}(X)$ désigne le polynôme $\sum_{j=i}^p b_jX^{j-i}$ et Z(X)=$\pi_B(X)\wedge\pi_A(X)$.

Les polynômes $\pi_B^{(i)}(X)$ seront appelés « polynômes adjoints de $\pi_B(X)''$.

La condition nécessaire et suffisante d'existence de M_1 est donc $\pi_B^{(1)}(A)C_1+\pi_B^{(2)}(A)C_2+\ldots.+\pi_B^{(p)}(A)C_p\in\mathrm{Im}(\pi_B(A))$=Im(Z(A)) et, comme les colonnes de M se calculent directement à partir de M_1, cette condition est nécessaire et suffisante pour l'existence de M.

D'où

Théorème 3.

Soient (A,B)$\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, matrices compagnons, avec n$\geqslant$p et C$\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. C appartient à l'image de S(A,B) si et seulement si $\pi_B^{(1)}(A)C_1+\pi_B^{(2)}(A)C_2+\ldots.+\pi_B^{(p)}(A)C_p$ $\in$Im$(\pi_B(A))$.

1.3 L'ensemble des solutions de l'équation AM-MB=C

Soient $(A,B,C)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_p(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si l'ensemble des solutions de l'équation AM-MB=C n'est pas vide est un espace affine issu d'une solution particulière et dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation AM-MB=0.

On désigne par $M_1,\ldots,M_p$ les colonnes de M.

Supposons la Condition Nécessaire et Suffisante d'existence réalisée, c'est à dire $\sum_{k=1}^p\pi_B^{(k)}(A)C_k$ $\in$Im$(\pi_B(A))$, c'est à dire qu'il existe un vecteur colonne X tel que $\sum_{k=1}^p\pi_B^{(k)}(A)C_k$=$\pi_B(A)X$; comme l'image de la matrice $\pi_B(A)$ est égale à celle de $\pi_Z(A)$, ceci équivaut à $\sum_{k=1}^p\pi_B^{(k)}(A)C_k$=$\pi_Z(A)X$; et comme les n-q premières colonnes de $\pi_Z(A)$ engendrent les autres on peut supposer que X est de la forme $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-q} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lemme 4.

Soit une matrice $U \in \mathcal{M}_n(K)$ de rang s, dont les s premières colonnes sont linéairement indépendantes, il existe une matrice $V \in \mathcal{M}_{s,n}(K)$ telle que $VU = (\, I_s \;\; * \,)$.

Démonstration.

Si on désigne les s premières lignes de V par $({}^tV_1,..,{}^tV_s)$ et les s premières colonnes de U par $(U_1,..,U_s)$ chaque ligne de V doit satisfaire un système linéaire de la forme $({}^tV_i U_j = \delta_i^j)_{(i,j)\in\{1,..,s\}^2}$. □

Par suite, comme les n-q premières colonnes de $\pi_Z(A)$ sont linéairement indépendantes il existe une matrice $\Delta \in \mathcal{M}_{n-q,n}(K)$ telle que $\Delta\pi_Z(A) = (\, I_s \;\; * \,)$, d'où $\Delta\sum_{k=1}^{p} \pi_B^{(k)}(A) C_k = (\, I_s \;\; * \,) X =$X.

On pourra donc poser M$_1 = \Delta\sum_{k=1}^{p} \pi_B^{(k)}(A) C_k$.

D'où

Théorème 5.

Soient $(A,B,C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{\,n,p}(\mathbb{K})$, où $n \geqslant p$, une solution à l'équation matricielle AM-MB=C est la matrice M=$(M_1, \ldots, M_n)$, où $M_1 = \begin{pmatrix} \Delta\sum_{k=1}^{p} \pi_B(k)(A) C_k \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\forall j \in \{1, \ldots, p-1\}$ $M_{j+1} = AM_j$-Cj.

On désignera M par T(A,B)C.

Remarque 6.

Dans le cas où les spectres de A et B sont disjoints la matrice $\pi_B(A)$ est inversible, donc la Condition Nécessaire et Suffisante est trivialement satisfaite, quelle que soit la matrice C, et M$_1 = \pi_B(A)^{-1}$ $\sum_{k=1}^{p} \pi_B^{(k)}(A) C_k$

Remarque 7.

On trouvera dans [7] une formule pour l'inverse de $I_p \otimes A - {}^tB \otimes I_n$, valable seulement dans le cas où S(A,B) est bijective, les polynômes que nous avons désignés sous la notation $\pi_B(k)$ y jouent le même rôle central qu'ici.

2 Le cas où n<p.

AM-MB=C$\Longleftrightarrow {}^tB{}^tM - {}^tM{}^tA = -{}^tC$ mais les matrices ${}^tA$ et ${}^tB$ ne sont pas du type de matrices compagnon étudié au-dessus, cependant elles leur sont respectivement semblables, il est bien connu que si U=$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots. & \ldots & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & 1 & 0 & \ldots & \ldots. \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots. & 0 \end{pmatrix}$ et V=$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_{p-1} & 1 \\ b_2 & b_3 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots. & \ldots & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & 1 & 0 & \ldots & \ldots. \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots. & 0 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = U^{-1}$AU et ${}^tB = V^{-1}$BV), d'où ${}^tB{}^tM - {}^tM{}^tA = -{}^tC \Longleftrightarrow V^{-1}BV{}^tM$-${}^tM$U^{-1}AU=-^{t}C$\Longleftrightarrow$BV^{t}MU$^{-1} - V^t$MU^{-1}A=-V^{t}CU^{-1}.

Ce qui est équivalent, en posant D=-V${}^tC$U^{-1}, N=V${}^tM$U^{-1}, au système

$$\begin{cases} N_2 = \mathrm{BN}_1 - D_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ N_n = \mathrm{BN}_{n-1} - D_{n-1} \\ \pi_A(B) N_1 = \pi_A^{(1)}(B) D_1 + \pi_A^{(2)}(B) D_2 + \ldots. + \pi_A^{(n)}(B) D_n \end{cases}.$$

d'où N=$(N_1,...,N_n)$, $N_1=\begin{pmatrix} \Delta\sum_{k=1}^{n}\pi_A(k)(B)D_k \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\forall j\in\{1,...,n-1\}$ N_{j+1}=BM_j-Dj, où Z(X)=$\pi_B(X)\wedge\pi_A(X)$ et Δ est construite comme dans le paragraphe 1.

Puis M=${}^tU{}^t$N^{t}V^{-1} .

M sera noté T(A,B)C.

3 Le cas où n=p et A=B

Dans ce cas Z(X)=B(X)=A(X), le système devient $\begin{cases} M_2=\mathrm{AM}_1-C_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ M_p=\mathrm{AM}_{p-1}-C_{p-1} \\ 0=\pi_A^{(1)}(A)C_1+\pi_A^{(2)}(A)C_2+\ldots.+\pi_A^{(p)}(A)C_p \end{cases}$.

Si la Condition Nécessaire et Suffisante est réalisée M_1 est arbitraire, les équations restantes permettent d'en déduire M.

On désignera par T(A,B)C la matrice M obtenue en posant M_1=0.

4 Le cas général

On considère deux matrices carrées (A,B) et l'équation AM-MB=C.

Il existe deux matrices inversibles telles que $P^{-1}\mathrm{AP}=A'=\oplus_{i=1}^{\alpha}A_i$ et $Q^{-1}\mathrm{BQ}=B'=\oplus_{j=1}^{\beta}B_j$, où les A_i' et les B_j' sont des matrices compagnons et on décompose C'= P^{-1}CQ en blocs $(C'_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,\alpha\}\times\{1,\ldots,\beta\}}$ de manière compatible avec les décompositions de A' et B'.

Si on pose M'= P^{-1}MQ, AM-MB=C$\Longleftrightarrow$A'M'-M'B'=C' et si on décompose M' en blocs (M'$_{i,j}$)$_{(\mathrm{i,j})\in\{1,\ldots,\alpha\}\times\{1,\ldots,\beta\}}$ de manière compatible aussi alors AM-MB=C$\Longleftrightarrow$A'M'-M'B'=C'.

Si on pose M'=(M'$_{i,j}$)$_{(\mathrm{i,j})\in\{1,\ldots,\alpha\}\times\{1,\ldots,\beta\}}$ la relation A'M'-M'B'=C' est équivalente au système $(A_i'M'_{i,j}-M'_{i},_jB_j'=C'_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,\alpha\}\times\{1,\ldots,\beta\}}$; si on désigne par $M'_{i},_j$ une famille de solutions particulières la matrice M'=(M'$_{i,j}$)$_{(\mathrm{i,j})\in\{1,\ldots,\alpha\}\times\{1,\ldots,\beta\}}$ sera une solution particulière de l'équation A'M'-M'B'=C' et la famille (PM'$_{i,j}Q^{-1}$)$_{(i,j)\in\{1,\ldots,\alpha\}\times\{1,\ldots,\beta\}}$ sera une solution particulière de l'équation AM-MB=C.

5 Exemple

Soient $A=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&-2 \\ 0&0&1&0&-5 \\ 0&0&0&1&-4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&-2 \\ 0&1&-3 \end{pmatrix}$; pour obtenir une matrice C dans l'image de S(A,B) choisissons une matrice M quelconque et calculons C=AM-MB:

$M=\begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 0&1&0 \\ -1&1&1 \\ 1&2&3 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} -1&-1&5 \\ 0&1&3 \\ -1&2&-3 \\ -3&-2&7 \\ 1&1&2 \end{pmatrix}$.

$\sum_{k=1}^{3}\pi_{B(A)}^{k}C_k$=(2$\mathrm{I}_5$+3A+A^2)$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$+(3$\mathrm{I}_5$+A)$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$+$\mathrm{I}_5\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ce qui confirme que C appartient à l'image de S(A,B).

La solution particulière sera N=(N_1, N_2, N_3) où N$_1$=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,$N_2 =$ AN$_1 - C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$,$N_3$=AN$_2 - C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$.

On vérifie qu'effectivement AN-NB=C.

Remarque 8. Au sujet de la matrice nommée Δ dans le paragraphe 1 l'allure des n-q premières colonnes de la matrice $\pi_Z(A)$, $\begin{pmatrix} z_0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ z_1 & z_0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{q-1} & \dots & \dots & \dots & z_0 \\ 1 & z_{q-1} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, suggère que le calcul de Δ peut se faire en pivotant suivant les colonnes.

Références:

[1] S. Barnett, Polynomials and Linear Control Syqtems, Marcel Dekker, New York, 1983

[[2] S. Bouarga, M.E. Charkani, Polynomial Solution of Sylvester Matrix Equation, International Journal of Algebra, vol 9,2015, no.4,p.185-194

[3] M.Dincic, Solving the Sylvester Equation AX-XB=C when Spec(A)$\cap$Spec$(B) \neq \varnothing$, Electronic Journal of Linear Algebra,vol 35,p.1-28.

[4] Q.Hu, D.Chen, The Polynomial Solution to the Sylvester Matrix Equation, Applied Mathematical Letter, vol 19,p .859-864

[5] P. Lancaster, M. Tismenetsky, The Theory of Matrices, 2nd ed., Academic Press, Orando, 1985.

[6] Z-Y. Li, B. Zhou, Spectral Decomposition based Solutions to the matrix equation AX-XB=C, IET Control Theory and Applications, 2018, vol 12, p119-128.

[7] A.J.B. Ward, A closed-form formula for the inverse of the nivellateur in the solution of Sylvester Matrix Equation, International Journal of Mathematical Education for Science and Technology, 1993, vol 24, p101-105.