Comment réduire à la main une Matrice Non-Négative

Patrick Teller

Mars 2024

Résumé

l'objet de ce travail est la présentation d'une caractérisation originale des matrices non-négatives réductibles, la présentation d'un algorithme relatif à la réductibilité et une procédure élémentaire pour déterminer la matrice de permutation P nécessaire pour la réduction d'une matrice non-négative réductible. Contrairement aux algorithmes qui s'inscrivent dans l'étude des graphes, le point de vue adopté a consisté à étudier des zéros de la matrice considérée et de ses puissances.

1 Définitions et conventions de base

Nous appellerons tableau de $n \times n$ un ensemble de cases vierges et dans lesquelles nous conviendrons de la possiblité d'inscrire des valeurs et nous appellerons matrice ce tableau ainsi rempli ; la distinction entre tableau, "vierge", et matrice , "remplie", est de toute première importance parce que nous nous intéressons à l'évolution des valeurs affichées dans ces cases. Si $M = (m_{(i,j)}) \in \mathcal{M}_n(R^{+*})$ on désignera par $m_{(i,j)}$ la valeur affichée en (i, j) et par $m^{[t]}_{(i,j)}$ la valeur affichée dans la même case de la matrice M^t. En particulier nous appellerons zéro une case qui affiche une valeur nulle. La jème colonne d'une matrice M sera désignée par $M^{(j)}$, à ne pas confondre avec M^j qui représente la puissance j de la matrice.

Afin d'éviter des complications dues au langage nous emploierons les termes "non négatif" pour signifier "supérieur ou égal à 0" et "positif" pour "strictement positif". Nous ne considérerons que des matrices non-négatives et, dans un premier temps nous supposerons que leur diagonale est positive. Dans un second temps nous verrons comment traiter le cas de diagonales non-positives.

2 Systèmes complets de zéros

Définition 1. *Soit une matrice $M = (m_{(i,j)}) \in \mathcal{M}_n(R^{+*})$ et deux sous-ensembles I et J de $[1, .., n]$ on désignera par $M_{I,J}$ la matrice extraite, dans laquelle les lignes d'indice n'appartenant pas à I ont été supprimées, de même que les colonnes d'indice n'appartenant pas à J.*

Définition 2. *Système complet de zéros*

Une matrice $M = (m_{(i,j)}) \in \mathcal{M}_n(R^{+*})$ *à diagonale positive étant donnée, on dira que la matrice extraite* $M_{I,J}$ *est un système complet de zéros lorsque* $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = [1, , ., n]$ *et* $M_{I,J} = 0$.

Remarque: 1. *L'objectif de cette étude devant concerner des dispositions de zéros dans des cases d'un tableau* $n \times n$, *on comprendra que la positivité de la diagonale entraîne que si* $M_{I,J}$ *est un système complet de zéros aucune case de la diagonale ne pourra appartenir à la matrice* $M_{I,J}$ *qui est censée être nulle.*

Ci-dessous un exemple : les 0 représentent des zéros, les x représentent des valeurs quelconques non-négatives. La matrice $M_{((1,3,4,7),(2,5,6,8))}$ est un système complet de zéros, elle est formée de trois alignements horizontaux composés chacun de trois rectangles de même largeur (une case), mais de longueurs variables (une case, deux cases, une case) :

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	m_{11}	0	x	x	0	0	x	0
2	x	m_{22}	x	x	x	x	x	x
3	x	0	m_{33}	x	0	0	x	0
4	x	0	x	m_{44}	0	0	x	0
5	x	x	x	x	m_{55}	x	x	x
6	x	x	x	x	x	m_{66}	x	x
7	x	0	x	x	0	0	m_{77}	0
8	x	x	x	x	x	x	x	m_{88}

3 Zéros et matrices réductibles

Rappelons les définition et caractérisations des matrices non-négatives réductibles [1]

Définition 3. *Matrices réductibles*

$M \in \mathcal{M}_n(R^{*+})$ *est dite réductible s'il existe une matrice de permutation* P *telle que* ${}^tPMP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ *où* $(B, D) \in \mathcal{M}_p(R^{+*}) \times \mathcal{M}_{n-p}(R^{+*})$ *et* $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(R^{+*})$. *Une matrice irréductible est une matrice qui n'est pas réductible.*

Rappelons le

Théorème 1. *Caractérisation des matrices irréductibles dans le cas de matrices non-négatives*

La matrice non-négative $M \in \mathcal{M}_n(R^{+*})$ *est irréductible si et seulement si, quel que soit le couple* (i, j), *il existe un entier k tel que* $m^{[k]}_{(i,j)} > 0$.

Cette caractérisation possède une interprétation en termes de graphes, il semble que les algorithmes efficaces se placent dans ce cadre.

Attention à ne pas confondre avec une des caractérisations des matrices non-négatives primitives : $M \in \mathcal{M}_n(R^{+*})$ est primitive si et seulement si il existe un entier k tel que quel que soit le couple $(i, j), m^{[k]}_{(i,j)} > 0$.

En prévision du Théorème suivant continuons l'étude de l' exemple :

Soit $M \in \mathcal{M}_8(R^{+*})$ et la matrice extraite $M_{(1,3,4,7),(2,5,6,8)}$, dont les éléments sont des zéros. Les lignes de la matrice M dont l'indice est dans I portent la séquence est $(x, 0, x, x, 0, 0, x, 0)$ La séquence formée par les colonnes de M dont l'indice est dans J est $(0, x, 0, 0, x, x, 0, x)$ Ces deux séquences sont en "opposition" : lorsque l'une vaut 0 l'autre vaut x, et réciproquement.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	x	0	x	x	0	0	x	0
2	x	x	x	x	x	x	x	x
3	x	0	x	x	0	0	x	0
4	x	0	x	x	0	0	x	0
5	x	x	x	x	x	x	x	x
6	x	x	x	x	x	x	x	x
7	x	0	x	x	0	0	x	0
8	x	x	x	x	x	x	x	x

On peut regrouper les 0 le long de la bordure ouest en échangeant les colonnes 8 et 1, puis 6 et 3, puis 5 et 4 par multiplication à droite de M par P ; alors en multipliant M à sa gauche par la transposée de P on échange les lignes 8 et 1, puis 7 et 3, puis 5 et 4 ce qui regroupe les 0 le long de la bordure sud. Au total on a regroupé les 0 auprès du coin sud-ouest.

Théorème 2. *Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(R^{*+})$ qui contient un système complet de zéros F, il existe une permutation P telle que ${}^tPMP$ est de la forme $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$. P est définie directement par la connaissance de F.*

Démonstration. Soient $M \in \mathcal{M}_n(R^{+*})$et $M_{I,J}$ une matrice extraite de M, où les deux ensembles d'indices I et J sont complémentaires.

On peut décrire comme suit les transpositions que nous allons effectuer : Une partie de [1,..,n] sera appelée "segment initial" si son minimum est égal à 1 et si elle est connexe dans $[1, .., n]$, elle sera appelée "segment final" si son maximum est égal à n et si elle est connexe dans $[1, .., n]$. On rappelle que I indexe les lignes de $M_{I,J}$ et J indexe les colonnes de $M_{I,J}$.

Tant que I n'est pas un segment final (et J n'est pas un segment initial effectuons sur les colonnes de M la transposition $P = (min(I), max(\complement_{[1,..,n]} I)$ qui se traduit par $I : I - min(I) + max(J)$ $J : J - max(J) + min(I)$.

Comme le minimum de I croit strictement (et celui de J décroit strictement) la procédure s'arrête ; à ce moment I est un segment final, J est un segment initial, les zéros sont regroupés en un bloc sud-ouest. De plus nous avons aussi obtenu P comme composée de transpositions.

□

Proposition 1. *Soit une matrice réductible $M \in \mathcal{M}_n(R^{*+})$*

Si M est réductible alors il existe une permutation P telle que ${}^tPMP$ est de la forme $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $(B, D) \in \mathcal{M}_p(R^{*+}) \times \mathcal{M}_{n-p}(R^{*+})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(R^{*+})$.

Si on désigne par $[e_1, .., e_n]$ la base canonique alors $PM_{[1,..p],[p+1,..,n]}{}^tP = 0$ et si on désigne par (I, J) la base déduite de $[e_1, .., e_n]$ par le changement de base associé à la matrice inversible P, alors $M_{I,J} = 0$;

D'où le

Théorème 3. *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(R^{*+})$ est réductible si et seulement si elle contient un système complet de zéros.*

4 L'algorithme

Le point de vue adopté consiste, à la suite du paragraphe précédent, à étudier l'existence éventuelle d'un système complet de zéros.

Supposons que M contienne un système complet de zéros.

Alors il existe P telle que $M = P \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}^t P$, d'où $M^2 = P \begin{pmatrix} B^2 & BC + CD \\ 0 & D^2 \end{pmatrix}^t P$, donc, lorsqu'on élève M au carré, toutes les cases du bloc sud-ouest affichent à nouveau un zéro et il en est de même pour les cases de M qui leur correspondent dans la conjugaison par P. Si une telle case a pour coordonnées (i, j) on a à la fois $m_{(i,j)} = 0$ et $m^{[2]}_{(i,j)} = 0$.

D'autre part on peut définir les ensembles d'indices suivants : si on fixe $j \in [1, .., n]$ on posera $I_1 = k \in [1, .., n], m_{(k,j} = 0$ et $I_2 = \complement_{[1,..,n]} I_1$; en particulier on aura $i \in I$ puisque $m_{(i,j)} = 0$.

Soit alors $\sum_{k\in[1,..,n]} m_{(i,k)} \times m_{(k,j)} = 0$, c'est à dire $\sum_{k\in I_1} m_{(i,k)} \times m_{(k,j)} + \sum_{k\in I_2} m_{(i,k)} \times m_{(k,j)} = 0$; mais comme $\forall k \in I_1 \; m_{(k,j)} = 0$ il ne reste que $\sum_{k\in I_2} m_{(i,k)} \times m_{(k,j)} = 0$ et, comme dans cas $m_{(k,j)} > 0$ alors $m_{(i,k)} = 0$. En résumé, si M contient un système complet de zéros et si j est choisi comme au-dessus, avec I_1 et I_2 associés à j, alors $\forall (i, k) \in I_1 \times I_2 \; m_{(i,k)} = 0$.

Par suite la matrice extraite M_{I_1,I_2} est un candidat pour représenter un système complet de zéros, elle vérifie (à cause de la définition de I_1 et I_2) l'essentiel des conditions, reste à vérifier si elle est nulle.

Si j ne convient pas on change de colonne et si aucun j ne convient il n'y a pas de système complet de zéros, ce qui signifie que M est irréductible.

D'où l'algorithme :

fini :=faux j :=1

Tant que $j \leq n$ et fin=faux déterminer dans la j-ième colonne de M les ensembles $I_1 = \{y \in [1, .., n], m_{(y,j)} = 0\}$ et $I_2 = \{y \in [1, .., n], m_{(y,j)} > 0\}$ si $M_{I_1,I_2} = 0$ fini :=vrai sinon $j := j + 1$ fin.

La complexité, en termes de nombre d'opérations est moins bonne que les algorithmes de recherche de composantes fortement connexes mais la méthode proposée a l'avantage de fournir, dans le cas de réductibilité, de manière immédiate la matrice P qui intervient dans la formule de la réducibilité (voir 3).

5 Le cas où la diagonale n'est pas positive

Dans le cas où la diagonale de M n'est pas positive posons $N = M + Id$, qui sera à la fois non-négative et à diagonale positive.

Proposition 2. *Soient M une matrice non-négative et à diagonale non-positive et N=Id+M , M est réductible si et seulement N l'est.*

Démonstration. Soit P une matrice de permutation $M = P \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}^t P \Leftrightarrow N = Id + \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}^t P \Leftrightarrow N = P \begin{pmatrix} Id + B & C \\ 0 & Id + D \end{pmatrix}^t P$ (parce que B et D sont carrées).

Par suite la réductibilité de M est équivalente à celle de N, à laquelle on pourra appliquer ce qui concerne les matrices non-négatives à diagonale positive. □

6 références

[1], A.Berman, R.J. Plemons, Non Negative Matrices in the Mathematical Sciences, SIAM's Classics in Applied Mathematics, Philadelphia 1994.