LE PROBLEME DE GERSTENHABER pour 3 MATRICES COMMUTANTES

Patrick Teller

20 mars 2025

Le Problème de Gerstenhaber concerne la dimension de l'Algèbre commutative engendrée par k matrices.
On sait depuis longtemps [1],[2] que dans le cas de deux matrices commutantes A et B de taille n, la dimension de $C[A,B]$ est inférieure ou égale à n ; de nombreuses démonstrations en ont été fournies, s'appuyant soit sur la Géométrie Algébrique [1],[2], soit sur des techniques d'Algèbre linéaire, soit sur la Théorie des Modules. On sait que le résultat n'est pas vrai dans le cas de l'Algèbre engendrée par des matrices commutantes en nombre supérieur ou égal à quatre et des résultats ont été développés dans [5]. On trouvera dans [4] un panorama assez riche sur les divers aspects du problème.
Le cas de trois matrices commutantes restait ouvert. On trouvera ici la preuve que le Théorème de Gerstenhaber pour trois matrices commutantes est vrai. La démonstration, élémentaire, s'appuye fortement sur les matrices de Weyr. Le paragraphe 1 concerne l'ajout ou le retrait d'une ligne ou d'une colonne nulle aux matrices d'une algèbre de matrices, il est rappelé ici pour la commodité du lecteur. Le paragraphe 2 rappelle, sans démonstrations, les définitions et les résultats concernant les matrices de Weyr ; on pourra trouver les démonstrations, les motivations et de nombreux exemples dans [3]. Il réduit l'étude du Théorème au cas de triplets de matrices commutantes dont l'une est nilpotente. Le paragraphe 3 pécisera les définitions nécessaires à une étude fine des matrices commutant avec une matrice nilpotente de Weyr ; nous avons donné à ces matrices le nom de "matrices fractales" à cause de leur structure particulière. Le paragraphe 4 est consacré à l'étude du morphisme Φ qui associe à toute matrice M de F_W le produit MW (W est la matrice de Weyr nilpotente de ce triplet) ; en particulier sont étudiées les familles libres maximales d'éléments de l'image et de son noyau et de son image. Ces résultats permettent de conclure au moyen d'une récurrence.

Je présente mes excuses pour la publication au cours des dernières années de brouillons d'étude de ce problème, qui ont essaimé sur le web et contenaient des erreurs.

1 Insérer, désinsérer

Il est bien connu que lors de la multiplication de deux matrices A et B la jième colonne du produit AB est le produit de la matrice A par la j-ième colonne de B et, de même la i-ème ligne du produit AB est le produit de la ième ligne de A par est le produit de A par la matrice B. Par suite si F est une algèbre de matrices et si on ajoute à chaque matrice de F une même ligne ou une même colonne de zéros l'ensemble ainsi obtenu l'application de l'addition et de la multiplication matricielles lui confère une structure d'algèbre ; si désigne l'ajout de lignes et/ou de colonnes du nom d'insertion et , de même la suppression de lignes et/ou de colonnes de zéros du nom de désinsertion le résultat obtenu par insertion et/ou désinsertion est une algèbre isomorphe à F. Ce résultat banal sera employé à deux occasions par la suite.

2 Matrices de Weyr

Définition 1. *Matrice de Weyr nilpotente*
On appelle matrice de Weyr nilpotente associée à la composition $n_1 \geq n_2 ... \geq n_t$ *de* n *la matrice définie par blocs comme suit :*

— $W = (W_{i,j})$ *où le bloc* $W_{i,j}$ *appartient à* $M_{n_i,n_j}(C)$

— $\forall i \in \{1,..,t-1\}, W_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.. & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$

— *si* $j \neq i+1, W_{i,j} = 0$

d'où $W = \begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & 0 & W_{2,3} & 0 & \\ .. & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & W_{n_{t-1},n_t} \\ 0 & 0 & 0 & 0.. & 0 \end{pmatrix}$.

On vérifiera que $\forall i < j < k, W_{i,j1} W_{j,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.. & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ . & .. & .. & .. \\ . & . & ... & 1 \\ 0 & 0 & . & 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 \\ .. & . & .. & . \\ . & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0. & 0 \end{pmatrix} = W_{i,k}$.

$$\textit{ainsi que } W^2 = \begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & 0 & W_{2,3} & 0 & \\ .. & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & W_{n_{t-1},n_t} \\ 0 & 0 & 0 & 0.. & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & 0 & W_{2,3} & 0 & \\ .. & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & W_{n_{t-1},n_t} \\ 0 & 0 & 0 & 0.. & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & W_{1,3} & 0.. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_{2,4} & 0 \\ .. & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & W_{n_{t-2},n_t} \\ 0 & 0 & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 1. *Toute matrice nilpotente $M \in M_n(C)$ est semblable à une unique matrice de Weyr nilpotente.*

Exemple : l'endomorphisme f tel que
$0 \leftarrow e_1 \leftarrow e_5 \leftarrow e_7 \leftarrow e_8$
$0 \leftarrow e_2 \leftarrow e_6$
$0 \leftarrow e_3$
$0 \leftarrow e_4$
est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & 0 & W_{2,3} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & W_{3,4} & \\ 0 & 0 & 0 & 0.. & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 2. *Toute matrice $M \in M_n(C)$ est semblable, de manière unique à l'ordre près, à une matrice en blocs de la forme*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \times I + W_1 & 0.. & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 \times I + W_2 & 0.. & 0 \\ .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0.. & .. & \lambda_r \times I + W_r \end{pmatrix}$$

,où les W_i sont des matrices de Weyr nilpotentes.

Soient trois matrices commutantes (A,B,C) et (a,b,c) les endomorphismes qu'elles représentent dans la base canonique ; soit $\prod_{i=1..r}(X - \lambda_i)^{z_i}$ le polynôme minimal de C, il en découle la décomposition de C^n en somme directe $\bigoplus Ker((c - \lambda_i I)^{z_i})$. Il est facile de montrer qu'un endomorphisme f de C^n commute avec c si et seulement si pour tout i $f(Ker((c - \lambda_i I)^{z_i})$ est inclus dans $Ker((c - \lambda_i I)^{z_i})$.

Par suite, si P désigne le passage à une base associée à la décomposition

$\bigoplus Ker((c-\lambda_i I)^{z_i})$, $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I + W_1 & 0 & 0.. & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 I + W_2 & 0 & 0.. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0.. & 0 & .. & \lambda_r I + W_r \end{pmatrix}$,

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0.. & .. & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0.. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0.. & 0 & .. & A_r \end{pmatrix}$, $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0.. & .. & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0.. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0.. & 0 & .. & B_r \end{pmatrix}$, où pour tout k $A_k B_k = B_k A_k$.

La dimension de l'algèbre engendrée par A,B,C étant alors la somme des dimensions des algèbres engendrées respectivement par les triplets $(A_k, B_k, \lambda_k I + W_k)$ il suffira d'établir le Théorème pour chacune des composantes directes ; enfin, comme W_i et $W_i + \lambda_i I$ ont même commutant, d'où il suffit d'établir le Théorème de Gerstenhaber pour le cas de trois matrices commutantes, dont une est nilpotente.

3 Matrices fractales

Théorème 3. *Le commutant d'une matrice de Weyr nilpotente*

Soit $W = (W_{i,j})$ une matrice de Weyr nilpotente associée à la composition $n_1 \geq n_2 ... \geq n_t$, une matrice en blocs $M = (M_{i,j})$, $MW = WM$ si et seulement si

— $\forall (i,j), i > j \Rightarrow M_{i,j} = 0$

— $\forall (i,j), i \leq j < t \Rightarrow M_{i,j} = \begin{pmatrix} M_{i+1,j+1} & * \\ 0 & ** \end{pmatrix}$

Une telle matrice sera appelée fractale, de composition $n_1 \geq n_2 ... \geq_t$. Une matrice fractale M est déterminée par sa première ligne de blocs $(M_{1,1}, M_{1,2}, .., M_{1,z_t}$; cette ligne de blocs sera appelée ligne directrice.

On dira que le bloc $M_{i,j}$ hérite du bloc $M_{i+1,j+1}$ et dans ce cas on appellera colonnes héritières les n_{j+1} premières colonnes de $M_{i,j}$; l'ensemble formé par une colonne et ses héritiers consécutifs sera appelé une dynastie ; les colonnes de la ligne directrice qui ne sont pas héritières sont appelées orphelines, par exemple les $n_j - n_{j+1}$ dernières colonnes de $M_{i,j}$

Si A est une matrice fractale et si $A_{i+1,j+1} = 0$ alors les colonnes héritières de $A_{i,j}$ sont nulles.

Exemple : Colonnes héritières et colonnes orphelines Soit la matrice fractale

$$M = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 0 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 0 & 0 & 33 & 34 & 0 & 36 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 0 & 46 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

le bloc $M_{1,1} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 22 & 23 & 24 \\ 0 & 0 & 33 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 44 \end{pmatrix}$ est héritier du bloc $M_{2,2} = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 0 & 22 \end{pmatrix}$ qui est héritier du bloc $M_{3,3} = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$. Les deux premières colonnes de $M_{1,1}$ sont des colonnes héritières,les deux dernières colonnes de $M_{1,1}$ $\begin{pmatrix} 13 \\ 23 \\ 33 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 14 \\ 24 \\ 34 \\ 44 \end{pmatrix}$ sont orphelines. Les colonnes appartenant uax blocs de la ligne directrice sont soit héritères, soit orphelines, les colonnes des autres blocs appartiennent nécessairement à une dynastie.

On appellera support d'une matrice M l'ensemble des cases qui contiennent des éléments non nuls de M.

Il découle de cette présentation que la somme et le produit de deux matrices fractales associées à une même composition est une matrice fractale de même composition, d'où l'ensemble des matrices fractales associées à une même composition constitue une algèbre, que l'on pourra noter F_W du nom de la matrice de Weyr nilpotente associée ; une algèbre de ce type sera appelée algèbre fractale.

Proposition 1. *Deux matrices fractales commutantes A et B associées à une même composition peuvent être simultanément trigonalisées : il existe une matrice fractale P (de même composition) telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient (fractales de même composition) et triangulaires supérieures. Lorsque nous considérerons des couples de matrices fractales nous pourrons considérer qu'elles sont sous forme triangulaire supérieure. [3],[6]*

4 Etude du morphisme Φ

Désormais on considérera une composition $n_1 \geq n_2 ... \geq n_t$ de n, W, la matrice de Weyr nilpotente associée, l'algèbre F_W, A et B des matrices fractales appartenant à F_W, qui commutent entre elles et avec la matrice W, de Weyr, triangulaires supérieures, associées à une composition $n_1 \geq n_2 ... \geq n_t$.

Nous désignerons par A_k et B_k les matrices extraites suivantes de A et B

$$\begin{pmatrix} A_{k,k} & A_{k,k+1} & .. & .. & A_{k,t} \\ 0 & A_{k+1,k+1} & .. & ... & A_{k+1,t} \\ .. & .. & .. & .. & \\ & .. & .. & & ..A_{t-1,t} \\ 0 & .. & .. & .. & A_{t,t} \end{pmatrix} \; et \; \begin{pmatrix} B_{k,k} & B_{k,k+1} & .. & .. & B_{k,t} & \\ 0 & B_{k+1,k+1} & .. & ... & B_{k+1,t} & \\ & & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & B_{t-1,t} & \\ 0 & .. & .. & .. & B_{t,t} & \end{pmatrix};$$

les matrices A,B et W étant triangulaires par blocs, $A_{k]}$ et B_k sont des matrices fractales, commutant avec W_k et entre elles, de composition $n_k \geq n_{k+1} ... \geq n_t$

Lemme 1. *Soit M de F_W, l'application Φ définie par $\Phi(M) = MW$ est une application linéaire de F_W vers F_{W_2}.*

Démonstration. Si on écrit $W = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_1,n_2} & 0... & 0 & \\ 0 & 0 & I_{n_2,n_3} & 0.. & 0 \\ .. & .. & ... & & \\ 0 & 0... & .... & ... & I_{n_{t-1},n_t} \\ 0 & ...0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$, alors $MW =$
$$\begin{pmatrix} 0 & M_{1,1}I_{n_1,n_2} & M_{1,2}I_{n_2,n_3}... & . & \\ 0 & 0 & M_{2,2}I_{n_2,n_3} & ... & . \\ .. & .. & ... & & \\ 0 & 0... & .... & ... & M_{t-1,t-1}I_{n_{t-1},n_t} \\ 0 & ...0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$
Le produit $M_{i,j}\begin{pmatrix} I_{n_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$ se déduit en supprimant dans la matrice $M_{i,j}$ les $n_j - n_{j+1}$ dernières colonnes ; par ailleurs $M_{i,j} = \begin{pmatrix} M_{i+1,j+1} & * \\ 0 & ** \end{pmatrix}$ l'effet combiné des zéros des n_{j+1} premières colonnes dans les $n_j - n_{j+1}$ dernières lignes de $M_{i,j}$ entraine la nullité des $n_j - n[j+1$ dernières lignes de $M_{i,j}W_{j,j+1}$. En conclusion $MW = (N_{i,j}, i < j)$, où $N_{i,j+1} = \begin{pmatrix} M_{i+1,j+1} \\ 0_{n_j-n_{j+1},n_j} \end{pmatrix}$, où on retrouve $n_j - n_{j+1}$ lignes et n_j colonnes de zéros.
$$MW = \begin{pmatrix} 0_{n_2,n_1} & M_{2,2} & M_{2,3} & ... & M_{2,t} \\ 0_{n_1-n_2,n_1} & 0_{n_1-n_2,n_2} & .. & 0_{n_1-n_2,n_{t-1}} & 0_{n_1-n_2,n_t} \\ 0 & 0 & M_{3,3} & ... & . \\ .. & .. & ... & & \\ 0 & 0... & ... & ... & M_{t,t} \\ 0 & ...0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$
La matrice MW est donc obtenue à partir de la matrice M

— en annulant la première colonne de blocs
— en supprimant la première ligne (=ligne directrice)
— pour chaque ligne L_i de blocs de M en insérant au-dessous n_i lignes de zéros

Au total la suppression de la ligne directrice supprime n_1 lignes de M et l'insertion des lignes de zéros en ajoute $\sum_{j=1..t-1} n_j - n_{j+1} = n_1$ lignes, ce qui confirme la transformation de M, n lignes et colonnes, en MW, même nombre de lignes , d'autre part suppression de $n1$ lignes de zéros, ce qui ne modifie pas la taille de la matrice MW. Par ailleurs si on désinsert la première colonne de blocs et les n_1 lignes de zéros on obtient une matrice de F_{W_2}, ce qui signifie que $\Phi(F_W$ est une algçbre isomorphe à F_{W_2}, où W_2 est la matrice nilpotente de Weyr, associée à la composition $n_2 \geq n_3... \geq n_{t-1}$ de $n - n_1$.

□

Proposition 2. *Le noyau de* Φ *est l'ensemble des matrices de* $C[A, B, W]$ *à support dans les colonnes orphelines de la ligne directrice.*

Démonstration. il découle de la description de $\Phi(M)$: $\Phi(M)$ est nulle si et seulement tous les blocs $M_{i+1,j+1}$ sont nuls, donc $\Phi(M)$ est nul si et eseulement si le suppport de M est inclus dans la réunion des colonnes orphelines. □

Définition 2. *Soit F_W une algèbre fractale, on appellera matrice orpheline toute matrice de F dont le support est inclus dans la réunion des colonnes orphelines.*

5 Le cas des matrices orphelines

Avant tout remarquons que les matrices orphelines ont leurs lignes numérotées $n_1 + 1, ..., n$ identiquement nulles, de même les colonnes héritères de la ligne directrice sont identiquement nulles, par suite nous désignerons par M^* la matrice obtenue par désinsertion des lignes et des colonnes de zéros ; la matrice désinsérée aura n_1 lignes et $\sum_{i=1..t-2}(n_i - n_{i+1}) = n_1$ colonnes, par suite l'ensemble des matrices orphelines est isomorphe à $M_{n_1}(C)$.

Proposition 3. *Soient deux matrices orphelines commutantes M et N la dimension de $C[M, N]$ est inférieure ou égale à n_1.*

Démonstration. Par application du Théorème de Gerstenhaber pour deux matrices la dimension de $C[M*, N*]$, qui est isomorphe à $C[M, N]$, est inférieure ou égale à $n_1 . Parailleurs$ □

Théorème 4. *Supposons le Théorème de Gerstenhaber vrai pour trois matrices commutantes, dont une nilpotente d'ordre t, alors il sera vrai pour tout triplet analogue où la matrice nilpotente est d'ordre $t + 1$.*

Démonstration. Nous allons raisonner par récurrence sur t, c'est à dire l'indice de nilpotence de W (ou la longueur de la composition plus 1).

Dans le cas t=1 W est la matrice nulle $C[A, B, W]$ est tout simplement réduit à $C[A, B]$, ce qui permet d'appliquer le Théorème de Gerstenhaber dans le cas de deux matrices commutantes.
Supposons désormais le résultat vrai pour trois matrices commutantes dont une nilpotente, associée à une composition de longueur inférieure ou égale à $t - 1$ et considérons A,B,W commutantes, avec W nilpotente de composition associée de longueur t ;

Le cardinal d'une famille libre de $C[A, B, W]$ est inférieur ou égal à la somme du cardinal maximal d'une famille libre de $\Phi(C[A, B, W])$ et du cardinal maximal d'une famille libre de $Ker(\Phi) \cap C[A, B, W]$. Nous avons vu plus haut que $\Phi(C[A, B, W]) estisomorphe C[A_2, B_2], W_2)$ qui est associé à une composition de longueur $t - 1$, donc les familles libres qu'il contient sont de cardinal inférieur ou égal à $n - n_1$. Comme $n_1 + n - n_1 = n$ la dimension de $C[A, B, W]$ est majorée par n. D'où le résultat demandé. Ce qui suffit (voir paragraphe 2) à établir le Théorème de Gerstenhaber dans le cas de trois matrices commutantes.

Remarque : Le procédé employé a consisté en fait à décomposer l'algèbre fractale $C[A, B, W]$ en une somme directe : d'une part l'algèbre qui consiste en les matrices orphelines , d'autre part une sous-algèbre isomorphe à C[A$_2$, $B2, W2]quiconsisteconsidrerlapartieincl$
19/03/2025; $correctionsmineuresle$ 20/03/2025

Références :

M. Gerstenhaber , On dominance and varities of commuting matrices, Annals of Mathematics, 73(1961)

newline 2] R. Guralnick, A note on commuting pairs of Matrices, Linear and Multilinear Algebra, 31,1992
[3] K O'Meara, J Clark, C. Vasconcelos Advanced Topics in Linear Algebra, Oxford University Press, 2011
[4] B Sethuraman, The Algebra generated by three commuting Matrices, http ://www.csun.edu/articleRMS
[5] K.Sivic, Varieties of triples of commuting matrices, PHD Thesis, Ljubljana, 2001

Notes personnelles