

La forme normale de Frobenius : une démonstration élémentaire

Patrick Teller

5 novembre 2025

Résumé

Le Théorème de la forme normale de Frobenius assure pour toute matrice non-négative l'existence d'une matrice de Permutation P telle que

${}^t P M P$ est de la forme $\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & \dots & M_{1p} \\ 0 & M_{22} & \dots & \dots & M_{2p} \\ 0 & 0 & M_{33} & \dots & M_{3p} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \dots & \dots & M_{pp} \end{pmatrix}$, où les blocs dia-

gonaux sont irréductibles.

La démonstration de ce Théorème se fait usuellement en considérant un graphe associé à la matrice M et en traduisant l'irréductibilité de la matrice au caractère fortement connexe du graphe, si on se réfère à l'ouvrage Combinatorial Matrix Theory(Brualdi et Ryser) cette démonstration occupe plus de deux pages et à peu près autant pour la démonstration de l'unicité (à l'ordre près) de l'ensemble des blocs diagonaux. Par ailleurs la réduction elle-même passe par l'utilisation d'un algorithme pour déterminer les composantes fortement connexes, puis la reconstruction de la matrice réduite à partir de ces composantes.

On trouvera ci-dessous une démonstration élémentaire et originale de l'existence de la matrice réduite et de la permutation ; pour l'intérêt du lecteur l'unicité à l'ordre près est établie, suivant [4]) ; une procédure de réduction est décrite, fondée sur la démonstration proposée, sa complexité est linéaire, donc pas pire que la connexité forte des graphes. Pour éviter les malentendus on conviendra qu'un réel non-négatif est un réel supérieur ou égal à 0 et qu'un réel positif est un réel strictement supérieur à 0. Les matrices non-négatives considérées sont à coefficients dans $\{0, 1\}$ avec les conventions de calcul qui s'imposent.

1 Les puissances d'une matrice : point de vue dynamique

Soit $M \in M_n(R^+)$ dont nous désirons étudier les puissances, T désignera un tableau, vide à l'origine, de n lignes et colonnes dans lequel s'afficheront

les termes des différentes puissances M^s ; on désignera par $t_{(i,j)}^{[s]}$ la valeur "à l'instant s" de la case (i,j) du tableau T.

2 Le rôle caché des Schmilblicks

Définition 1. On appellera zéro d'une matrice A l'ensemble des cases de cette matrice qui "affichent" la valeur 0 ; on dira qu'un zéro d'une matrice A est d'ordre k lorsque les valeurs de cette même case dans $\{A, A^2, \dots, A^k\}$ sont nulles de même on pourra dire qu'un zéro est d'ordre infini.

L'outil central pour l'étude des zéros d'ordre infini est la notion de Schmilblick d'une matrice non-négative.

Définition 2. *Schmilblick*

Soient M une matrice non-négative à n lignes et colonnes et une partition (I, J) de l'ensemble des indices $\{1, \dots, n\}$, on désignera par $M_{(I,J)}$ la sous-matrice de M obtenue en effaçant les lignes dont le numéro est dans J et les colonnes dont le numéro est dans I . $M_{(I,J)}$ sera appelé un *Schmilblick*.

Proposition 1. *Tout Schmilblick nul est une configuration de zéros d'ordre infini.*

Démonstration. Soit le Schmilblick nul associé à la partition (I, J) de $\{1, \dots, n\}$, la case (u, v) appartient à $I \times J$ si et seulement si u appartient à I et v appartient à J .

La valeur de la case (i, j) de $M \times M^t$ s'écrit $\sum_{k \in [1, \dots, n]} m_{(i,k)} m_{(k,j)}$ et, par suite si (u, v) est une case de $M_{(I,J)}$, sa valeur en $t+1$ sera $\sum_{k \in [1, \dots, n]} m_{(u,k)} m_{(k,v)}$ et comme (I, J) est une partition de $\{1, \dots, n\}$ la valeur sera $\sum_{k \in I} m_{(u,k)} m_{(k,v)} + \sum_{k \in J} m_{(u,k)} m_{(k,v)}$, si k appartient à I , comme v appartient à J $m_{(k,v)} = 0$ et si k appartient à J , comme u appartient à I , $m_{(u,k)} = 0$, d'où la valeur de la case (u, v) de $M \times M^{[s]}$ est zéro. Ceci montre que si un Schmilblick affiche uniquement des zéros à l'instant t , il affichera uniquement des zéros à l'instant $t+1$. $\square$

Proposition 2. *Soit une matrice non-négative M dont les zéros sont d'ordre infini, tout zéro de M appartient à un Schmilblick nul dont tous les points sont des zéros.*

Démonstration. Soit $I = \{k, m_{(k,j)} = 0\}$ et $J = \{k, m_{(k,j)} = 1\}$; par suite $\sum_{k \in [1, \dots, n]} m_{(i,k)} m_{(k,j)}$ se décompose en $\sum_{k \in I} m_{(i,k)} m_{(k,j)} + \sum_{k \in J} m_{(i,k)} m_{(k,j)}$. Or si k appartient à I $m_{(k,j)} = 0$ d'où $0 = \sum_{k \in J} m_{(i,k)} m_{(k,j)}$ et, comme $k \in J \Rightarrow m_{(k,j)} = 1$, on en déduit $\forall k \in J m_{(i,k)} = 0$. Soit maintenant un indice k de J , donc $m_{(k,j)} = 1$ et un indice u tel que $m_{(u,j)} = 0$, alors $m_{(u,k)} = 0$; en conclusion $M_{(I,J)} = 0$. $\square$

En conclusion sous l'hypothèse que les zéros de M sont d'ordre infini tout Schmilblick nul est le support d'une famille de zéros (d'ordre infini) et ceux-ci se regroupent par Schmilblick nuls. Les sous-matrices de taille $p \times (n - p)$

apparaissent dans [3], mais elles ne donnent lieu à aucun développement ou application.

3 Matrices non-négatives réductibles et Schmilblicks nuls

Lemme 1. *Soit M une matrice non négative, elle possède des zéros d'ordre infini si et seulement si il existe une matrice de permutation P telle que ${}^tPMP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, où B et D sont des matrices carrées.*

Démonstration. Soit M une matrice non négative qui contient des zéros d'ordre infini et, par suite, un Schmilblick nul $M^t(I, J)$.

Une partie de $\{1, \dots, n\}$ sera appelée "segment initial" si son minimum est égal à 1 et si elle est connexe dans $\{1, \dots, n\}$, elle sera appelée "segment final" si son maximum est égal à n et si elle est connexe dans $\{1, \dots, n\}$.

Rappelons que I indexe les lignes de $M_{I,J}$ et J indexe les colonnes de $M_{(I,J)}$. Un Schmilblick $M_{(I,J)}$ occupera le coin Sud-Ouest si et seulement si I est un segment final et J un segment initial; Notre objectif sera donc atteint lorsque I sera devenu un segment final (et par conséquent J sera devenu un segment initial).

Nous allons construire la permutation P comme produit de transpositions. Tant que I n'est pas un segment final (et J n'est pas un segment initial) effectuons sur les colonnes de M la transposition $P = (min(I), max(\mathbb{G}_{[1, \dots, n]}I))$ qui se traduit par $I : I - min(I) + max(J) \quad J : J - max(J) + min(I)$. Comme le minimum de I croit strictement (et celui de J décroît strictement) la procédure s'arrête; à ce moment I est un segment final, J est un segment initial, les zéros du Schmilblick sont regroupés en un bloc sud-ouest. Réciproquement la matrice $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ étant triangulaire supérieure les zéros situés sous la diagonale sont d'ordre infini; comme la transposée d'une matrice de permutation est son inverse les deux matrices M et $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ sont semblables d'où aux zéros de l'une correspondent les zéros de l'autre. $\square$

Définition 3. *Matrices réductibles $M \in \mathcal{M}_n(R^{*+})$ est dite réductible s'il existe une matrice de permutation P telle que ${}^tPMP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $(B, D) \in \mathcal{M}_p(R^{*+}) \times \mathcal{M}_{n-p}(R^{*+})$ et $C \in \mathcal{M}_{p, n-p}(R^{*+})$. Une matrice irréductible est une matrice qui n'est pas réductible.*

Nous avons montré plus haut qu'une matrice non-négative M est réductible si et seulement si elle possède un Schmilblick nul $M_{I,J}$ [3]

4 le Théorème sur la forme normale de Frobenius

Nous pouvons désormais démontrer le

Théorème 1. *Le Théorème de Frobenius*

Soit M une matrice non-négative il existe une matrice de permutation P telle que

$${}^tPMP \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & \dots & M_{1p} \\ 0 & M_{22} & \dots & \dots & M_{2p} \\ 0 & 0 & M_{33} & \dots & M_{3p} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \dots & \dots & M_{pp} \end{pmatrix}, \text{ où les blocs } M_{ii} \text{ sont}$$

irréductibles. L'ensemble des blocs de la diagonale est unique, à l'ordre près.

Démonstration. On appellera f l'endomorphisme représenté dans la base canonique de l'espace M par la matrice A .

On reprend la procédure de relocalisation qui fournit une matrice de permutation P telle que ${}^tPMP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, si B n'est pas en fin de compte irréductible

on lui applique la relocalisation d'où une matrice de permutation R telle que ${}^tRBR = \begin{pmatrix} B_1 & C_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$ et on remplace B en conséquence. On opère de même avec

D si celle-ci n'est pas irréductible. On continue ainsi tant qu'apparaissent des matrices réductibles. En fin de compte il existe une matrice de permutation T

$$\text{telle que } {}^tTMT \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & \dots & M_{1p} \\ 0 & M_{22} & \dots & \dots & M_{2p} \\ 0 & 0 & M_{33} & \dots & M_{3p} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \dots & \dots & M_{pp} \end{pmatrix}, \text{ où les blocs}$$

M_{ii} sont irréductibles.

L'irréductibilité des blocs de la diagonale découle de la procédure choisie, lorsqu'un bloc carré est créé, s'il n'est pas irréductible il possède un schmilblick nul et on procède à sa relocalisation.

Supposons l'existence d'une autre matrice de permutation Q telle que ${}^tQQ =$

$$\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & \dots & \dots & N_{1p} \\ 0 & N_{22} & \dots & \dots & N_{2p} \\ 0 & 0 & N_{33} & \dots & N_{3p} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \dots & \dots & N_{pp} \end{pmatrix}, \text{ où les blocs } N_{ii} \text{ sont irréductibles ; ce qui se tra-}$$

duit par la décomposition de l'espace en une somme $F_1 \oplus F_2 + \dots \oplus F_q$ où les sous-espaces $F_p, F_{p-1} \oplus F_p, \dots, F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_q$ sont stables par f , chacun étant un sous-espace stable de dimension maximale dans le suivant. Nous allons démontrer que F_q est égal à E_p . Pour établir l'unicité de la liste des blocs ir-

$$\text{réductibles (d'après [4]) notons que la matrice } \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & \dots & M_{1p} \\ 0 & M_{22} & \dots & \dots & M_{2p} \\ 0 & 0 & M_{33} & \dots & M_{3p} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \dots & \dots & M_{pp} \end{pmatrix}$$

traduit la décomposition de l'espace en une somme $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$ où les sous-espaces $E_p, E_{p-1} \oplus E_p, \dots, E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$ sont stables, chacun étant un sous-espace vectoriel, invariant de dimension maximale dans le suivant.

Soit le sous-espace F_q qui est stable, considérons le plus grand indice h tel que l'intersection $F_q \cap E_h$ soit non triviale ; alors $F_q \cap E_h \oplus \dots \oplus E_p$ est égale à $F_q \cap E_h$ à cause des conditions particulières et est stable, or F_q ne peut contenir de sous-espace stable non trivial que si $F_q \cap E_p = F_q$, d'où F_q est inclus dans E_h .

D'autre part si F_q est inclus dans E_p $F_q \oplus E_{h+1} \oplus \dots \oplus E_p$ est minoré par $E_{h+1} \oplus \dots \oplus E_p$ et majoré par $E_h \oplus E_{h+1} \oplus \dots \oplus E_p$ à nouveau cela contredit l'hypothèse d'où l'égalité $E_h = F_q$. Ce que l'on voulait démontrer. $\square$

5 Théorème de Frobenius : la pratique

Pour déterminer la forme normale d'une matrice non-négative il faut d'abord savoir trouver un Schmilblick d'une telle matrice, c'est à dire un Schmilblick nul, pour cela il faut être en état de tester des Schmilblick jusqu'à en trouver un qui soit nul, ou être sûr qu'il n'y en a pas. Pour savoir si un Schmilblick est nul il faut connaître une case les ensembles d'indices I et J , ce dernier étant le complémentaire de I . Pour connaître I il suffit de connaître une case du Schmilblick et il est possible de montrer qu'un Schmilblick a forcément une case de la forme $(1,k)$ ou $(k,1)$. Il suffit donc de passer en revue ces cases, opération de complexité $O(n)$. En suite, un Schmilblick nul étant déterminé on effectue la procédure de relocalisation En conséquence la complexité de cette méthode de réduction d'une matrice non-négative est linéaire, ce qui n'est pas pire que les méthodes fondées sur la connexité forte dans les graphes.

Références

- 1 R.A. Brualdi, A combinatorial Approach to Matrix Theory and its Applications, R.A.Brualdi, R. Cvetkovic, CRC PRes-2009
- 2 R.A. Brualdi, H.J. Ryser, Combinatorial Matrix Theory, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Cambridge University Press, 1991.
- 3 R.A. Brualdi, Matrices permutation equivalent to irreducible matrices and applications, Linear Multilin. Alg. vol 7, PP1-12.
- 4 F.R. Gantmacher Matrix Theory, Chelsea Publishing Company, 1974.
- 5 H.Minc, Nonnegative Matrices, Wiley Interscience Publications, 1988.
- 6 Peitgen, Jurgens, Saupe, , Fractals for the Classroom-shelves, Springer Verlag.
- 7 J.S. Schwarz, L'application des demi-groupes à l'étude des matrices non-négatives, Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, Tome 20 (1966-1967) no. 1, Exposé no. 2.
- 8 P. Teller Histoires de zéros. www.lalgebrisant.fr
- 8 H. Wielandt, Unzerlegbare, nicht negativen Matrizen, Math. Zeit. vol. 52 (1950).